

Capitolo 4

*Calcolo del campo elettromagnetico
Introduzione ai metodi numerici*

Impatto ambientale dei campi elettromagnetici

Equazioni di Maxwell

- In generale per conoscere il campo elettromagnetico generato da una data sorgente si dovrebbero risolvere le equazioni di Maxwell non omogenee (o eq. da esse derivate...)

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega) = -j\omega \underline{B}(\underline{r}, \omega) - \underline{J}_m(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r}, \omega) = \underline{J}(\underline{r}, \omega) + j\omega \underline{D}(\underline{r}, \omega) + \underline{J}_e(\underline{r}, \omega)$$

Questo si può fare rigorosamente solo in casi molto semplici

Allora, a seconda del tipo di problema in esame si utilizzano diverse approssimazioni che permettono di risolverlo e, conseguentemente, diversi *metodi numerici*

Metodi numerici per la soluzione delle equazioni di Maxwell

Ad esempio, per il calcolo del campo elettromagnetico:

- radiato da un'antenna (dipolo) in spazio libero

Metodo dei momenti

- radiato da un'antenna in presenza di dielettrici complessi

Metodo delle differenze finite nel dominio del tempo

Metodo degli elementi finiti

- radiato da un'antenna in ambienti molto estesi

Ottica geometrica

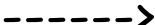
Metodo dei Momenti: applicazioni

Il Metodo dei Momenti (MoM) si usa per:

- analisi e progetto di antenne;
- analisi di problemi di scattering e assorbimento

Più in generale si può usare per ogni problema che possa essere rappresentato tramite un'equazione integro-differenziale

equazioni di Maxwell  soluzione - analitica
- numerica

equazioni di Maxwell  equazione integro-differenziale

METODO DEI MOMENTI

Soluzione MoM

Formulazione equazione integro-differenziale $\mathcal{L}f=g$ su S

g nota; f da determinare



Discretizzazione equazione: scelta funzioni di base

approssimazione f



Soluzione equazione discretizzata: scelta funzioni peso

definizione prodotto scalare
equazione matriciale



soluzione equazione matriciale



Fine analisi

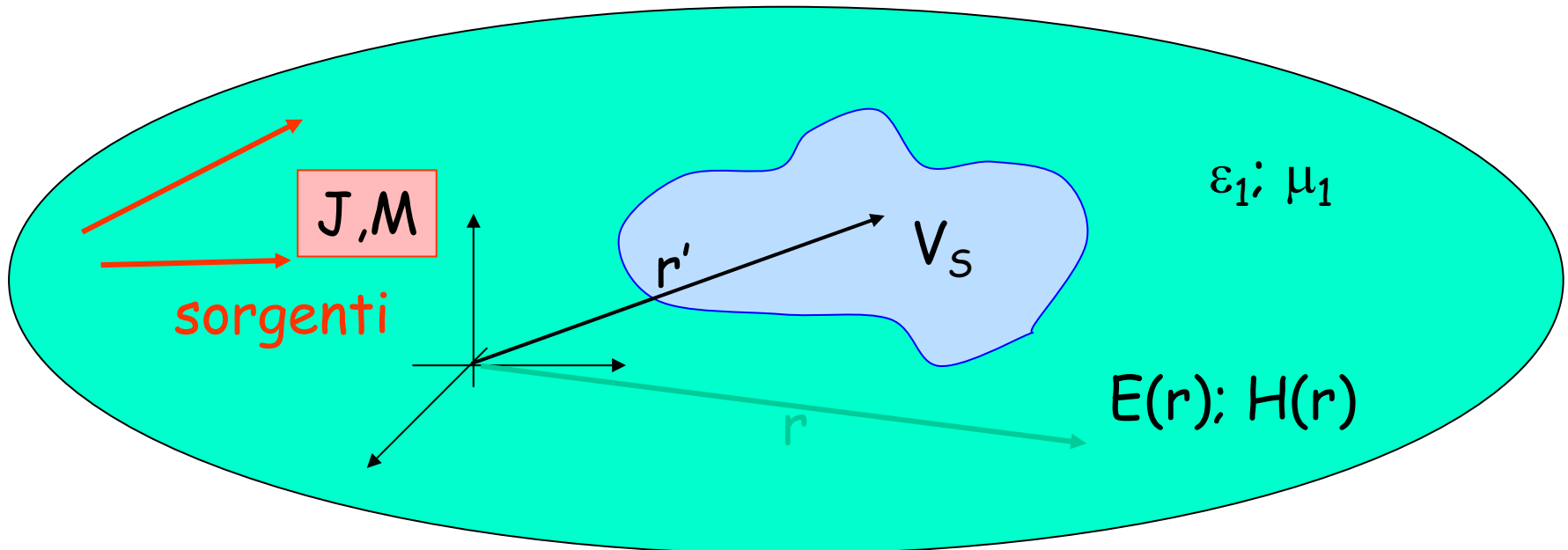
MoM: equazione integro-differenziale

$$E(r) = \underbrace{E_i(r)}_{\text{campo incidente se } V_s \text{ non c'è}} - j\omega\mu_1 \int_{V_s} \bar{G}_e(r, r') j\omega[\varepsilon(r') - \varepsilon_1] \underbrace{E(r')}_{\text{corrente che genera campo scatterato}} dV' + \int_{V_s} \bar{G}_m(r, r') j\omega[\mu(r') - \mu_1] H(r') dV'$$

$$r' \in V_s$$

EFIE

corrente che genera campo scatterato

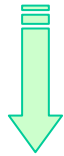


MoM: scelta funzioni di base

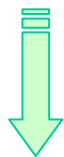
$$E(r) = E_i(r) - j\omega\mu_1 \int_{V_s} \bar{G}_e(r, r') j\omega[\varepsilon(r') - \varepsilon_1] E(r') dV' + \int_{V_s} \bar{G}_m(r, r') j\omega[\mu(r') - \mu_1] H(r') dV'$$



$$\mathcal{L}f = g$$



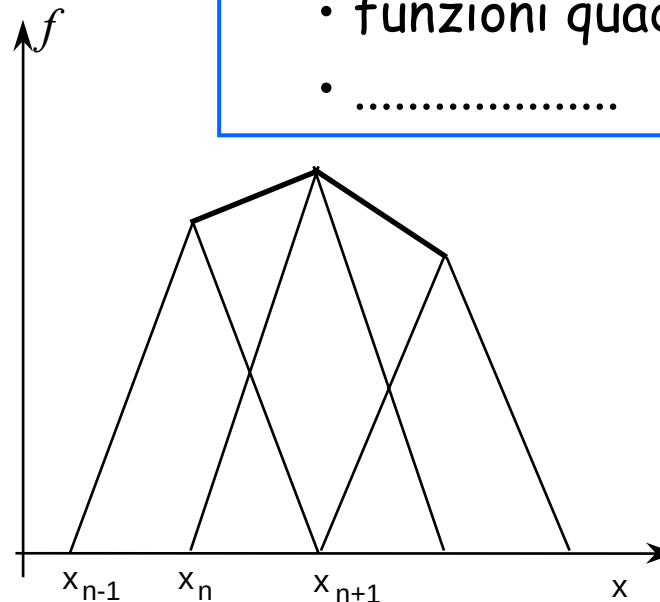
$$f \approx f_N = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n$$



$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \mathcal{L}f_n \approx g$$

FUNZIONI BASE f_n :

- funzione δ di Dirac;
- funzioni rettangolo;
- funzioni triangolo;
- funzioni quadratiche;
-



MoM: soluzione equazione discretizzata

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \mathcal{L}f_n \approx g$$

- Scelta funzioni peso: W_m

- Point-Matching Method $\rightarrow$ funzioni Dirac;
- Galerkin's Method $\rightarrow$ funzioni base;
- Least Squares Method $\rightarrow \mathcal{L}f_m$

- Equazione matriciale

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \langle W_m, \mathcal{L}f_n \rangle \approx \langle W_m, g \rangle \quad m = 1, 2, \dots, M$$

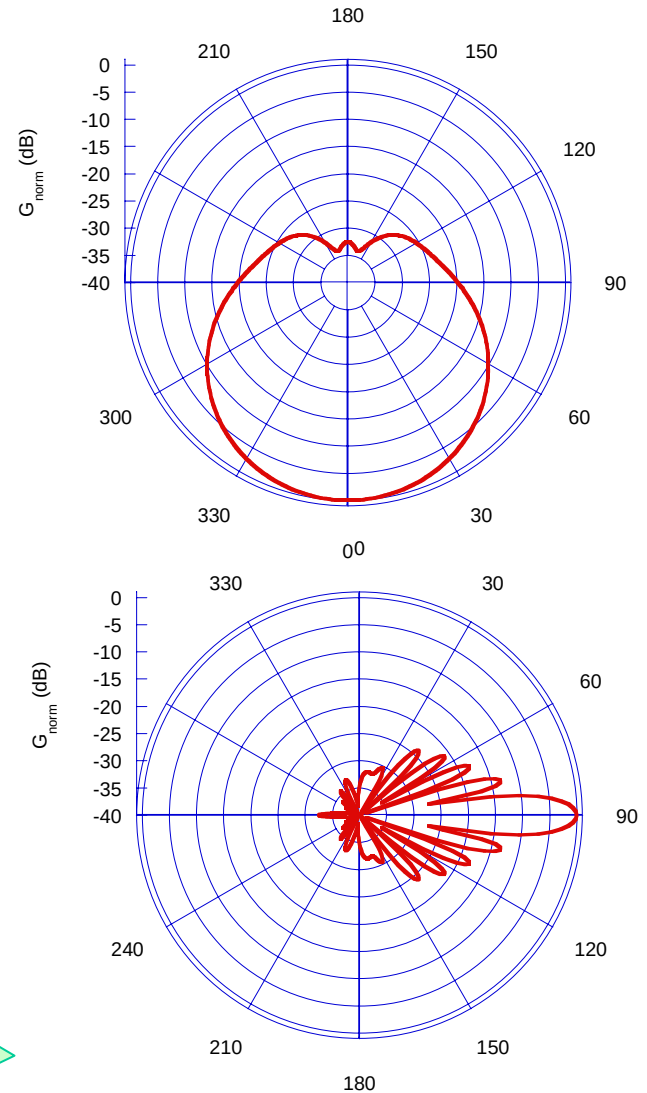
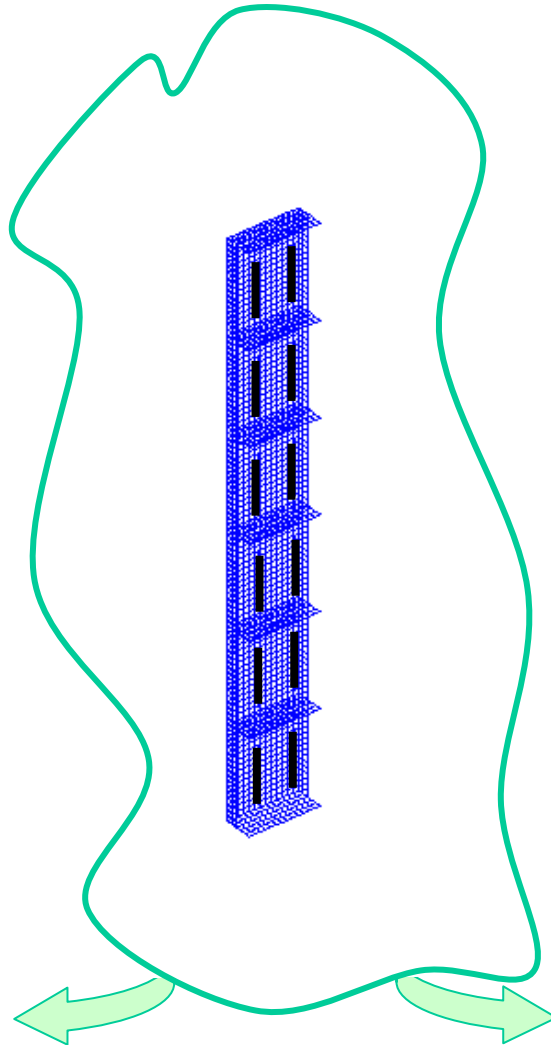
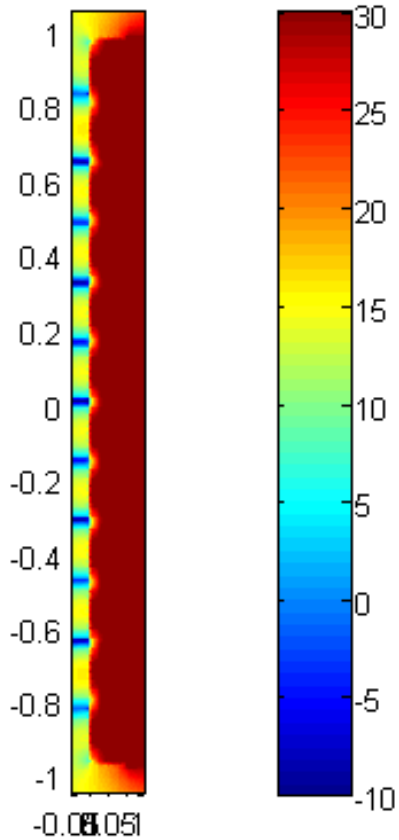
A_{mn}

g_m

$$A \alpha = g$$

MoM: esempio di risultati

antenne



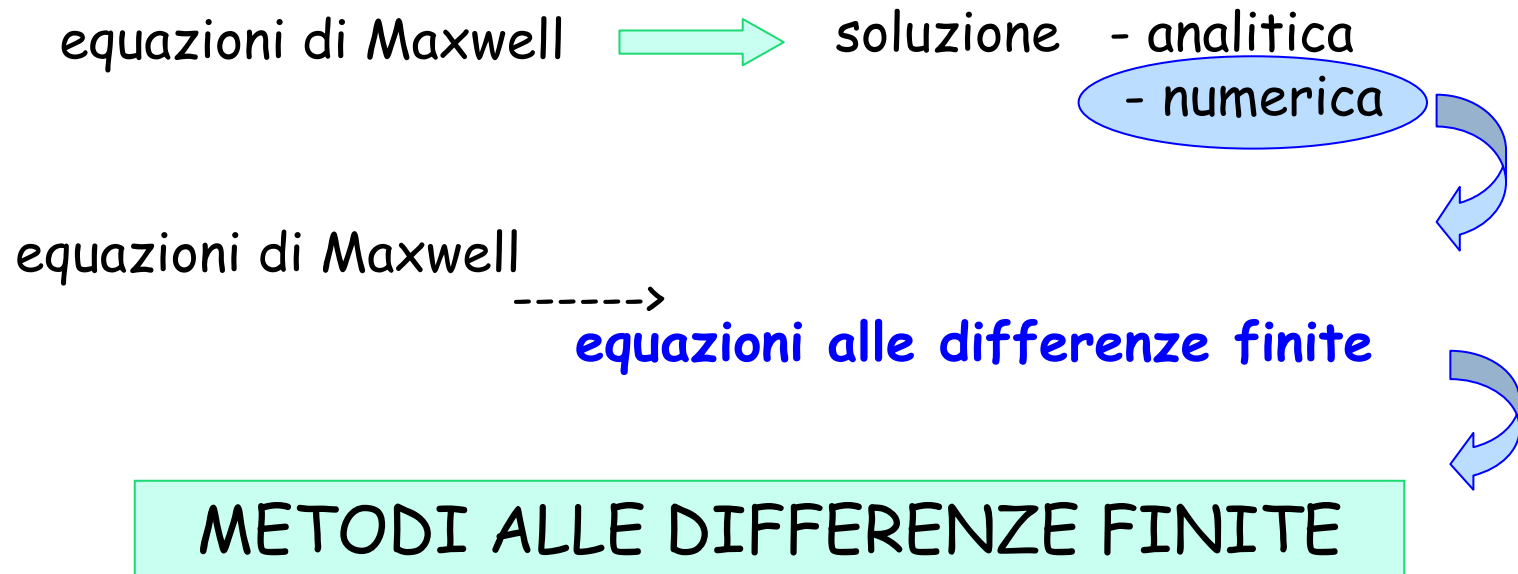
Campo elettrico (dB V/m)

Diagrammi di radiazione

Differenze finite nel dominio del tempo: applicazioni

Il metodo delle Differenze Finite nel Dominio del Tempo (FDTD) viene usato per:

- analisi e progetto di antenne;
- studio della propagazione di segnali in dispositivi a semiconduttore;
- progetto circuiti a microonde ed ottici;
- analisi di problemi di scattering e assorbimento (**bioelettromagnetismo**)



Soluzione FDTD

Discretizzazione spazio di analisi

definizione cella elementare



Discretizzazione equazioni Maxwell nel tempo

schema esplicito di soluzione

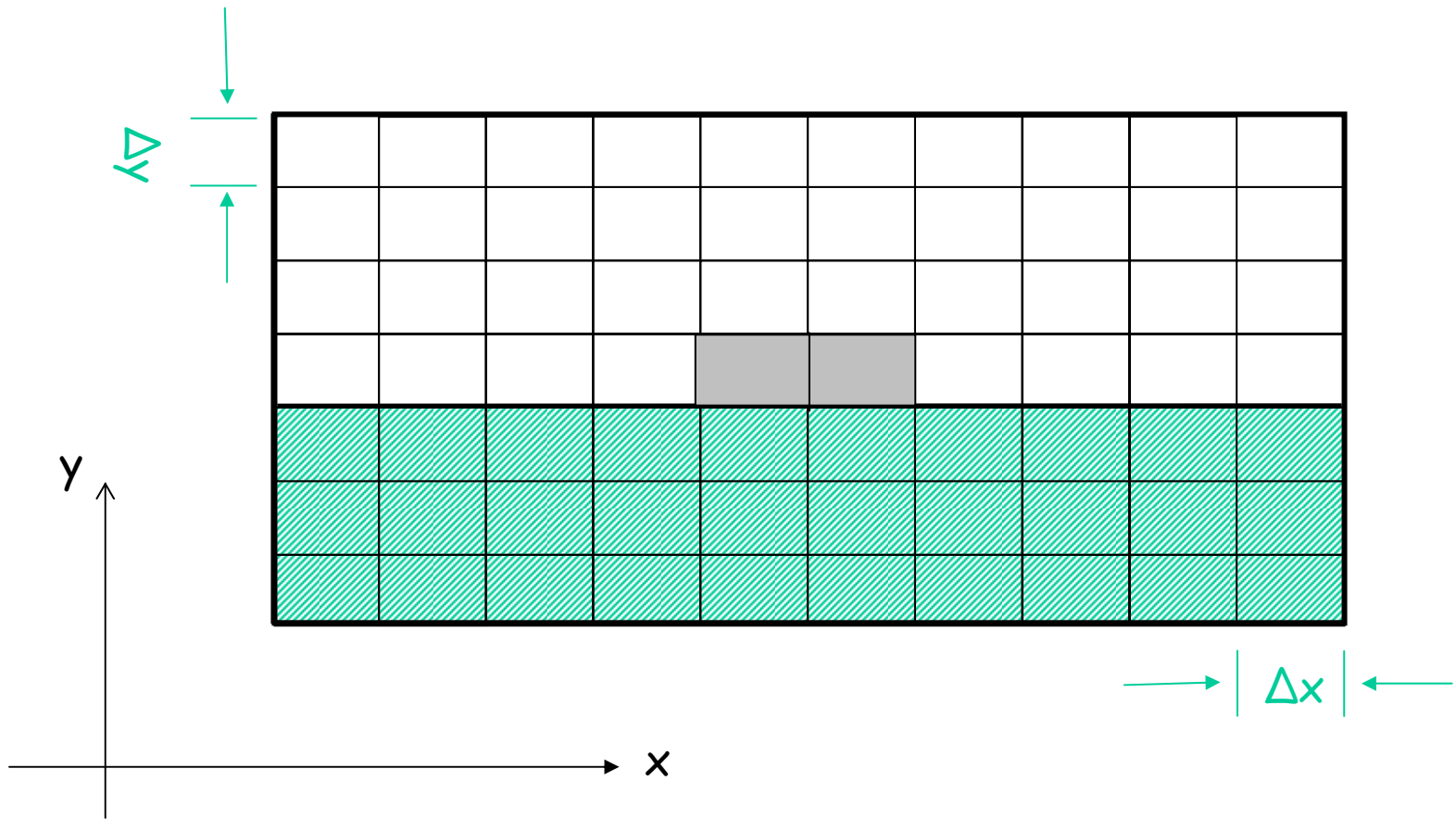


Soluzione equazione discretizzata: scelta passo temporale



Fine analisi

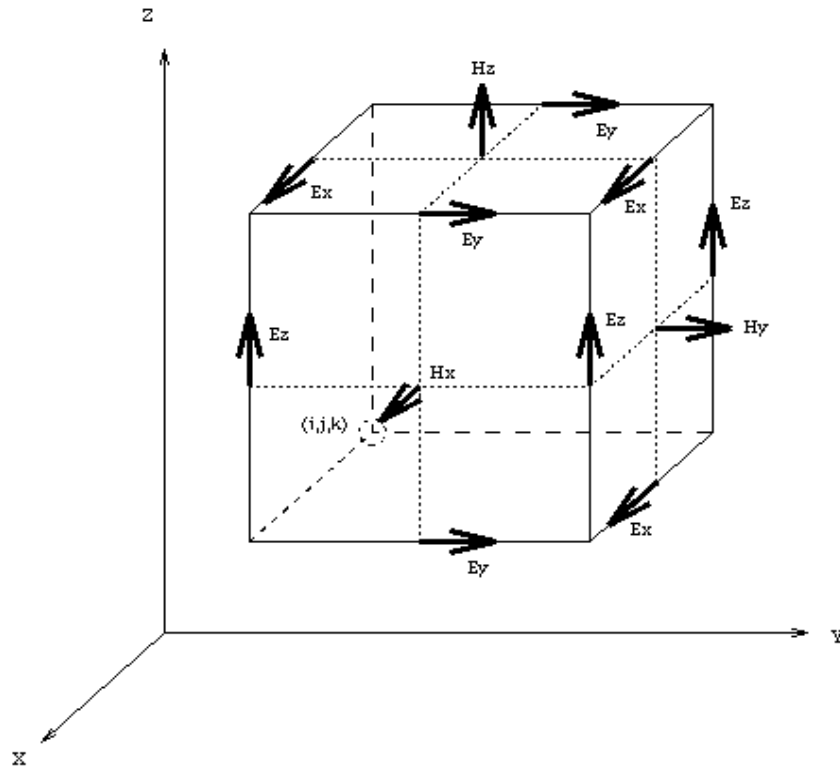
Discretizzazione regione analisi



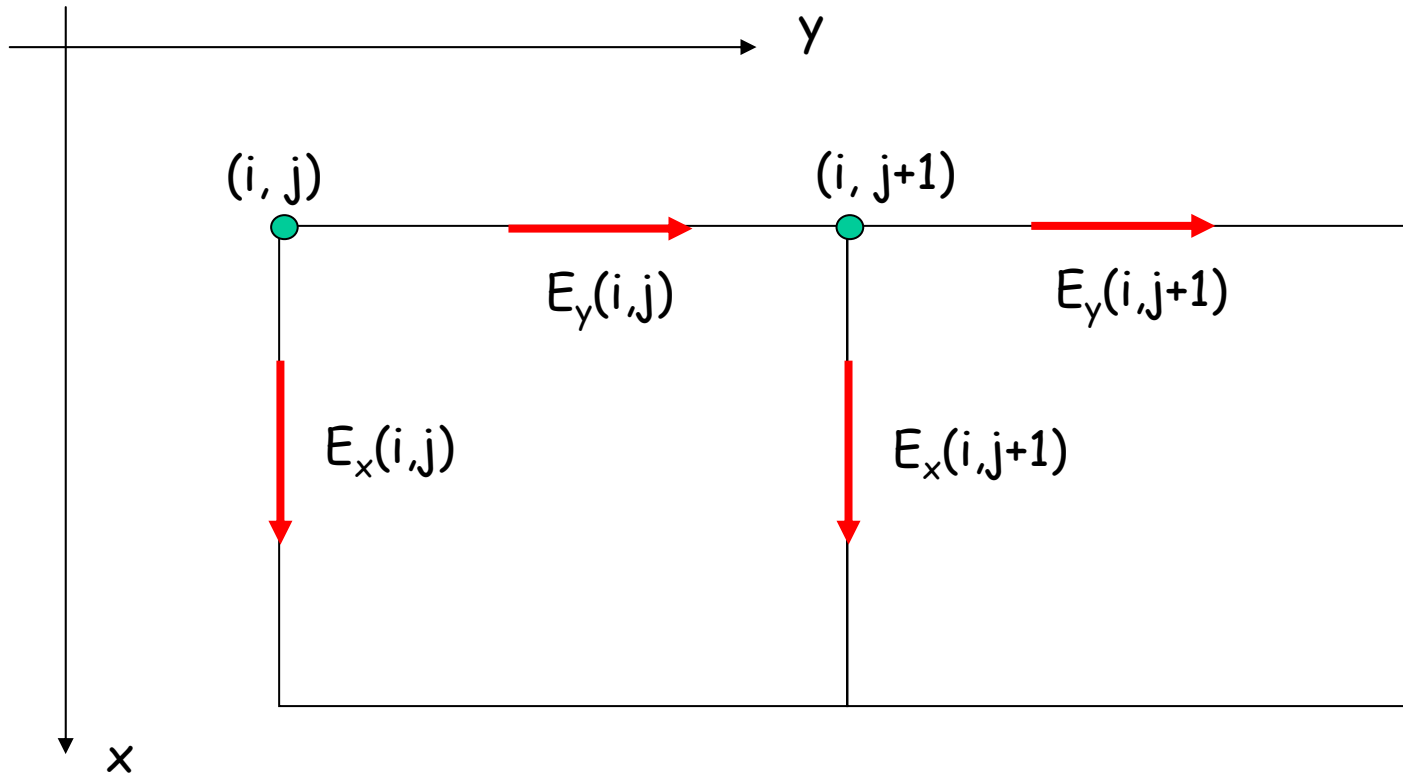
Nel tempo: $t = n \Delta t$

FDTD: cella elementare

Cella di Yee



Cella Yee sul piano xy



FDTD: discretizzazione equazioni Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

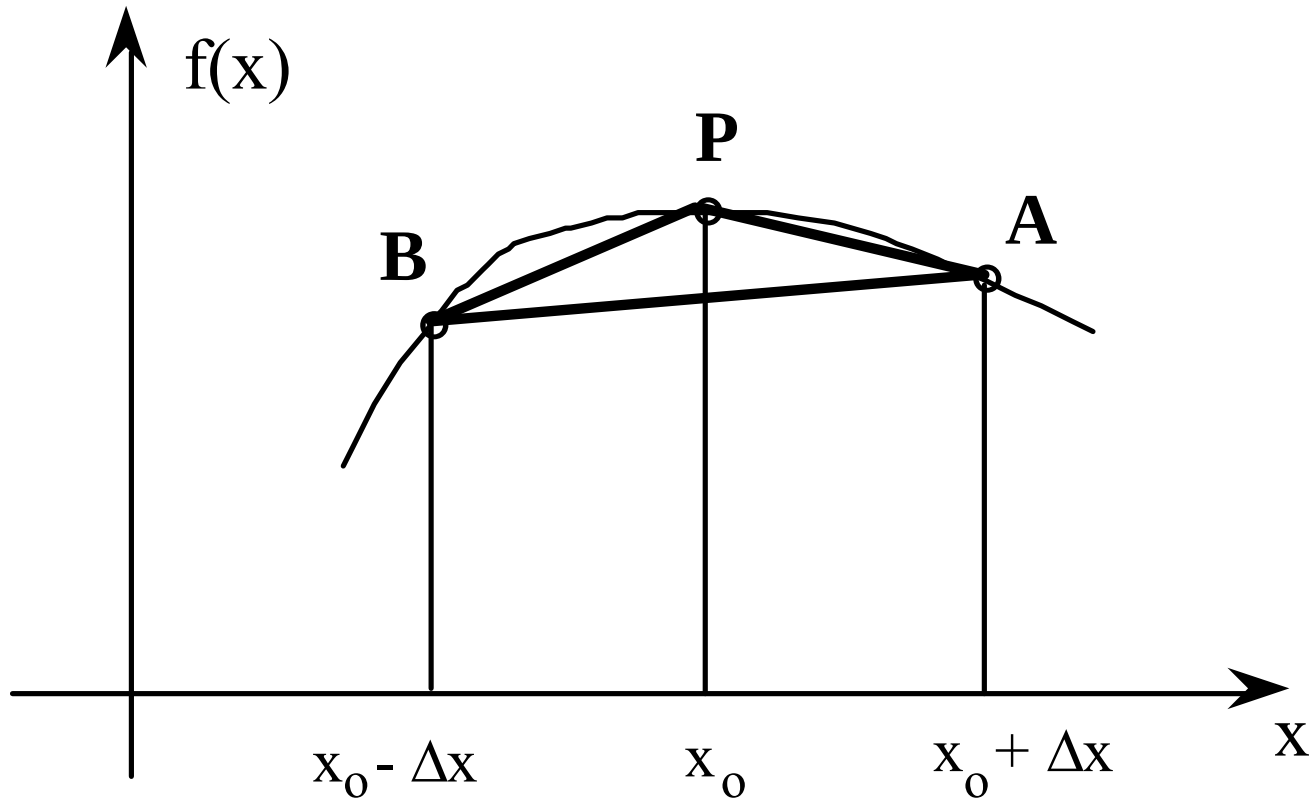
$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$



$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y(x,y,z,t) \quad \Rightarrow \quad E_y^n(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = E_y^n(i,j,k)$$

Formula alle differenze centrate



$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Taylor

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots$$

Sottraendo.....

Dallo sviluppo in serie di Taylor della $f(x)$:

PRECISIONE

$O(\Delta x^2)$

Derivazione - DF centrate

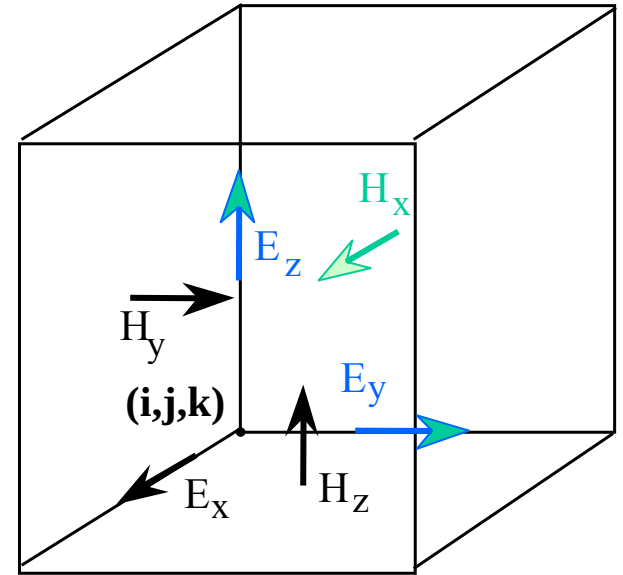
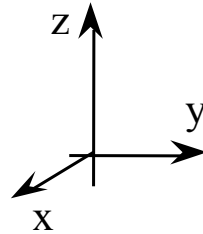
Esempi derivazione:

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i + 1/2, j, k) - F^n(i - 1/2, j, k)}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+1/2}(i, j, k) - F^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

FDTD: forma discretizzata: H_x

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$



$$\begin{aligned} & \frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) - H_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2)}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{E_y^n(i, j+1/2, k+1) - E_y^n(i, j+1/2, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j+1, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2)}{\Delta y} \right] \end{aligned}$$

Equazione FDTD per H_x

$$\begin{aligned} H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) = & H_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2) + \\ & + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} \left[E_y^n(i, j+1/2, k+1) - E_y^n(i, j+1/2, k) \right] + \\ & + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} \left[E_z^n(i, j, k+1/2) - E_z^n(i, j+1, k+1/2) \right] \end{aligned}$$

Nel computer.....

$$\begin{aligned} H_x^{n+1/2}(i, j, k) = & H_x^{n-1/2}(i, j, k) + \\ & + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} \left[E_y^n(i, j, k+1) - E_y^n(i, j, k) \right] + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} \left[E_z^n(i, j, k) - E_z^n(i, j+1, k) \right] \end{aligned}$$

Stabilità ed accuratezza

- Esiste una soluzione?
 - **stabilità**: la soluzione non 'cresce' con il tempo

Le equazioni dell'algoritmo di Yee convergono ad una soluzione stabile se:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$$

- E' quella che si sta cercando?
 - **accuratezza**: quanto la soluzione trovata si avvicina a quella vera
 1. errori del modello (equazioni Maxwell);
 2. errori di troncamento;
 3. errori di round-off.

✓ approssimazione serie infinite;

✓ approssimazione della griglia

✓ precisione finita del computer

Diminuiscono con la dimensione della cella

Aumentano con la dimensione della cella

Deve essere:

$$\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \ll \lambda$$

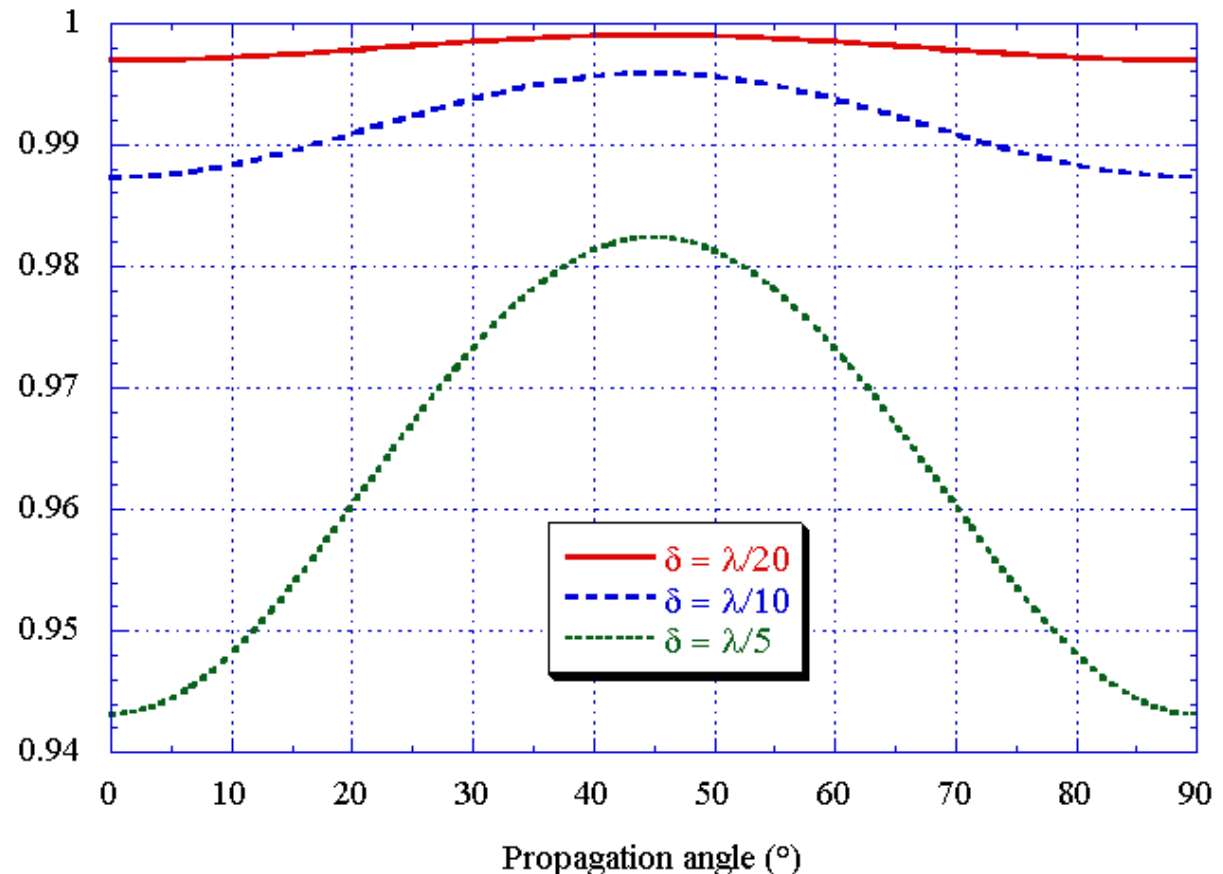
Dispersione

La discretizzazione dello spazio rende il mezzo dispersivo

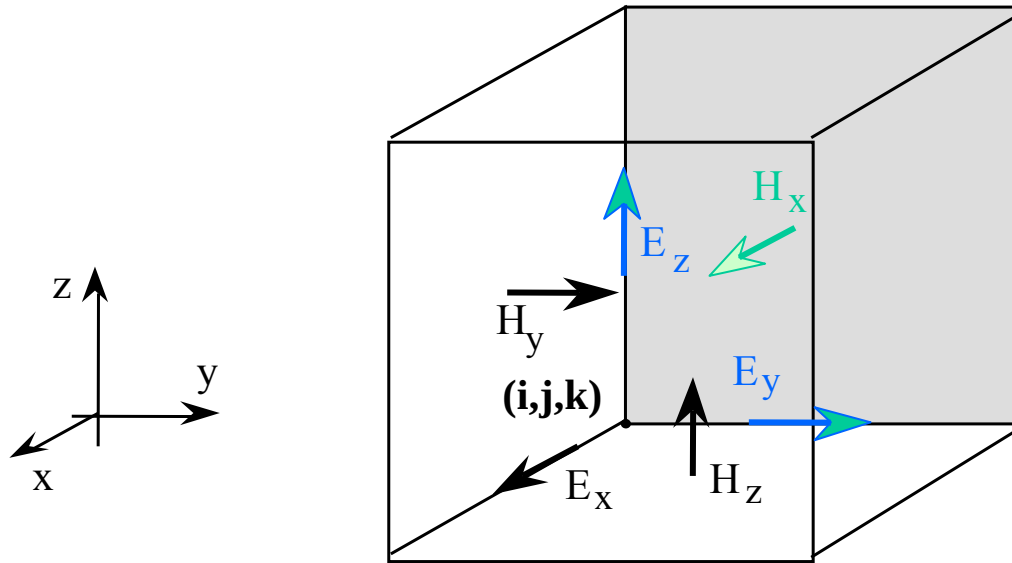
Analisi del rapporto

v_f/c = vel. fase onda nel modello / vel. fase reale (nel vuoto)

Tanto più
 $v_f/c \rightarrow 1$
per ogni direzione,
tanto migliore
è il modello



Condizioni di assorbimento



Il dominio di studio deve essere chiuso con delle Condizioni di Assorbimento

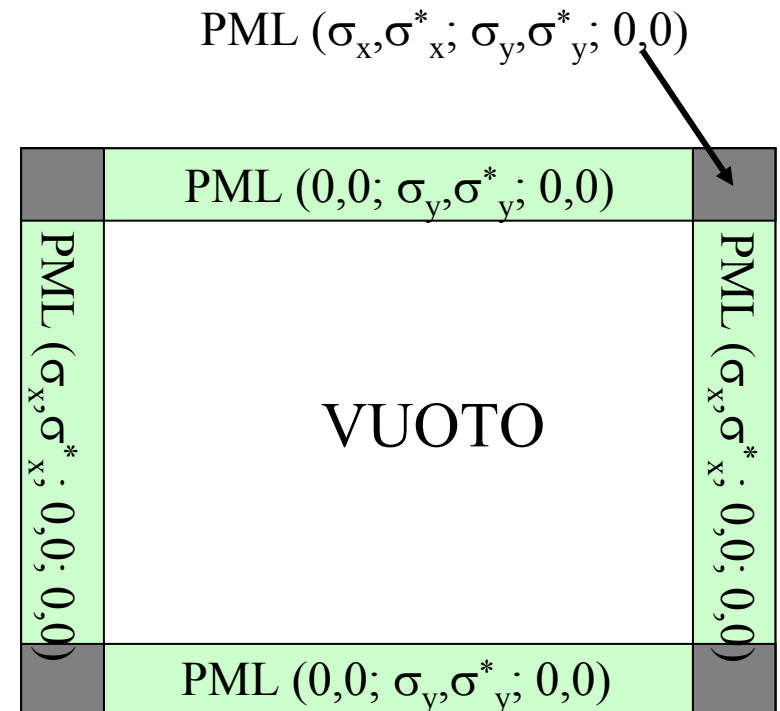
- 1966, Yee: dominio 'aperto';
- 1975, Taflove: mezzo assorbente;
- 1981, Mur: one-way equation;
- 1994, Berenger: perfectly matched layer (PML)

PML - Berenger 1994

*Viene definito uno strato di materiale anisotropo (non fisico) assorbente tutto intorno al dominio FDTD
(a sua volta chiuso con un conduttore perfetto)*

Le caratteristiche del PML sono date da:

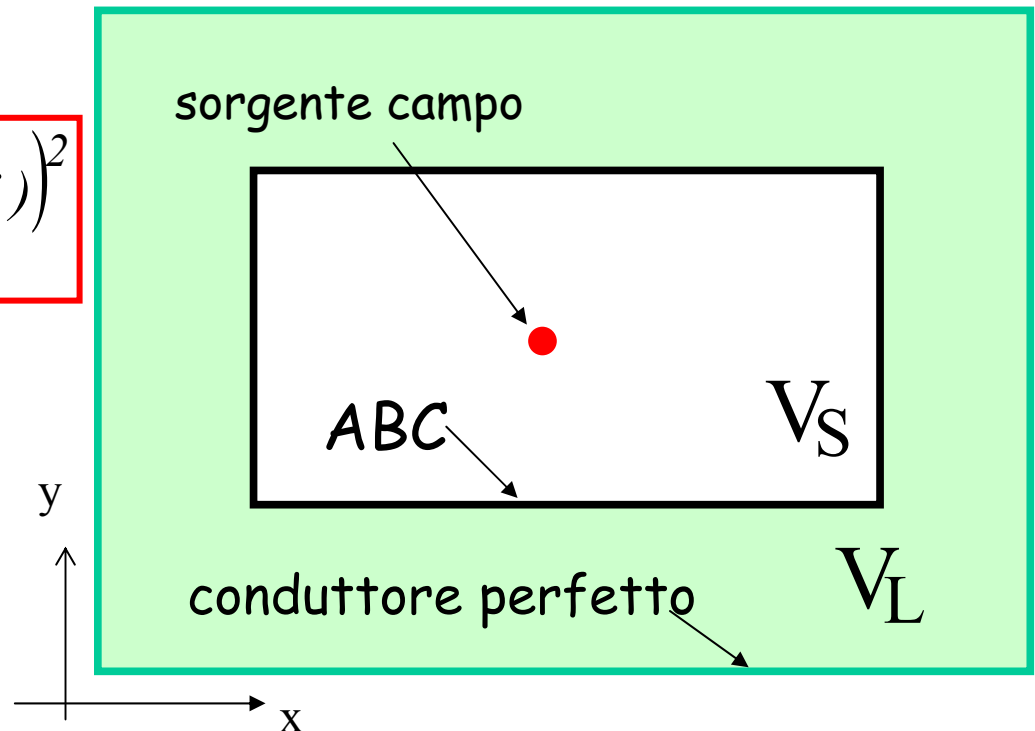
- il numero di celle che costituiscono lo strato;
- la dipendenza spaziale della conducibilità (lineare, parabolica...);
- il coefficiente di riflessione teorico per incidenza normale (teoricamente il PML dà sempre riflessione nulla all'interfaccia, invece numericamente si hanno riflessioni spurie dovute ai cambi di conducibilità)



Studio dell'errore legato alle ABC

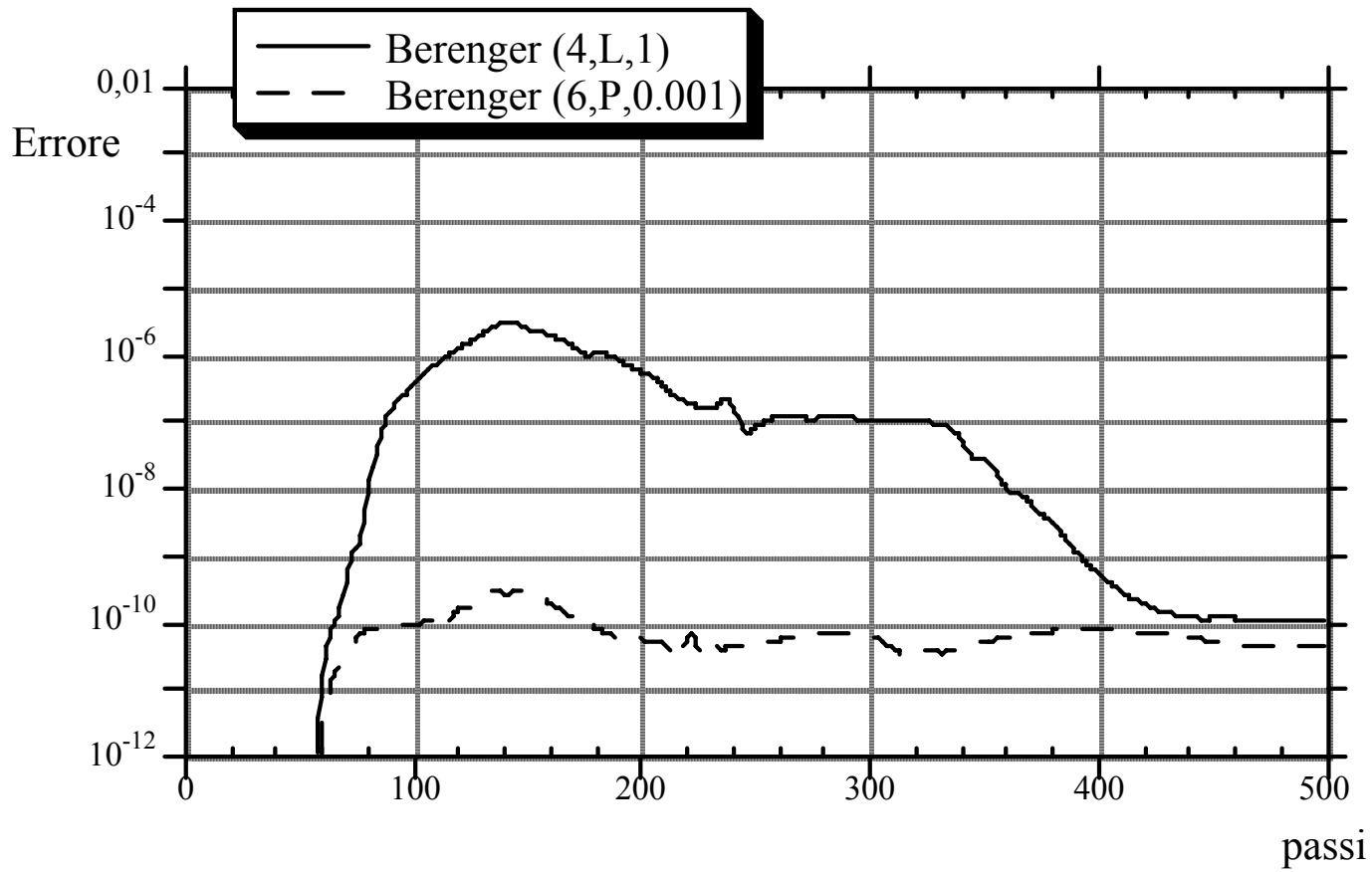
$$Errore(n) = \sum_{i,j} \left(E_z^S(i,j) - E_z^L(i,j) \right)^2$$

- n = passo temporale;
- $E_z^S(i,j)$ comp. E_z in V_S ;
- $E_z^L(i,j)$ comp. E_z in V_L



La somma è fatta su tutte le celle appartenenti a V_S

Studio dell'errore: PML



Eccitazione nell' FDTD

Tipo:

- Onda piana;
- Sorgenti di campo;
- Onde in strutture guidanti.

Tempo:

- Sinusoidale;
- Gaussiana.

FDTD: Vantaggi - Svantaggi

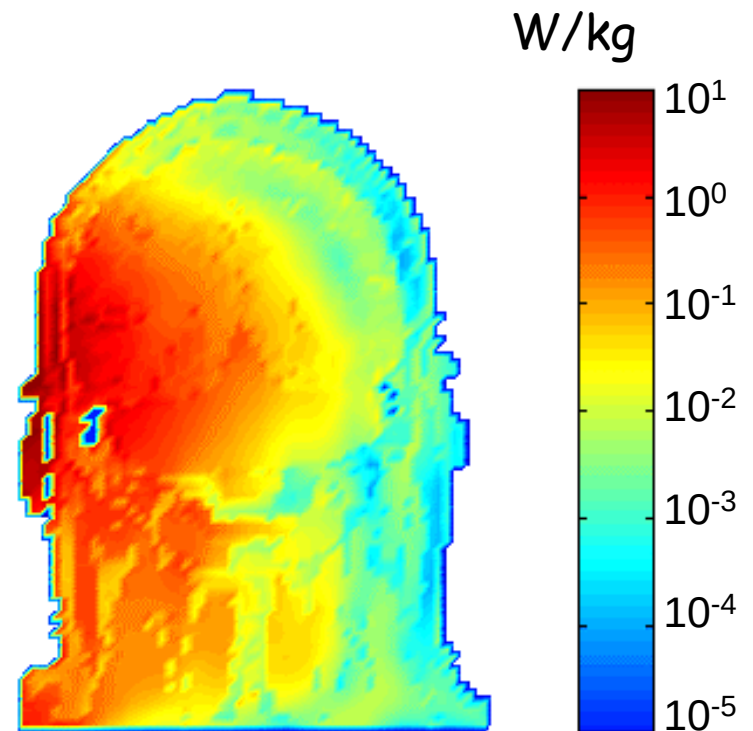
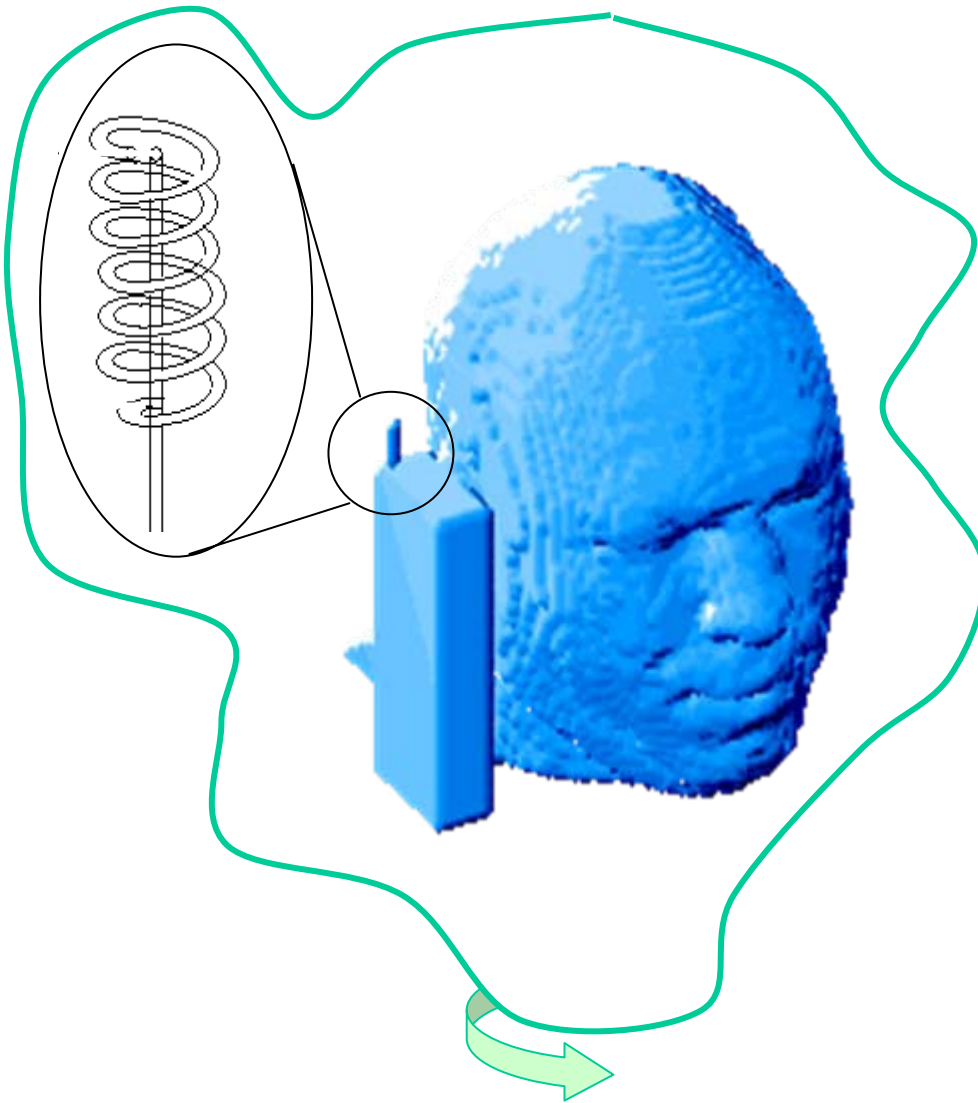


- Occupazione memoria nel PC (lineare con numero celle);
- Possibilità studio elementi scatteranti complessi;
- Possibilità studi di campo vicino e lontano
- Studio del fenomeno nel tempo

- Difficoltà modello contorni curvilinei
 - (griglie conformi, variabili....);
- Approssimazione ABC
 - (PML...);
- Difficoltà modello sorgenti
 - (metodi ibridi MoM, RT...)
- Studio nel tempo

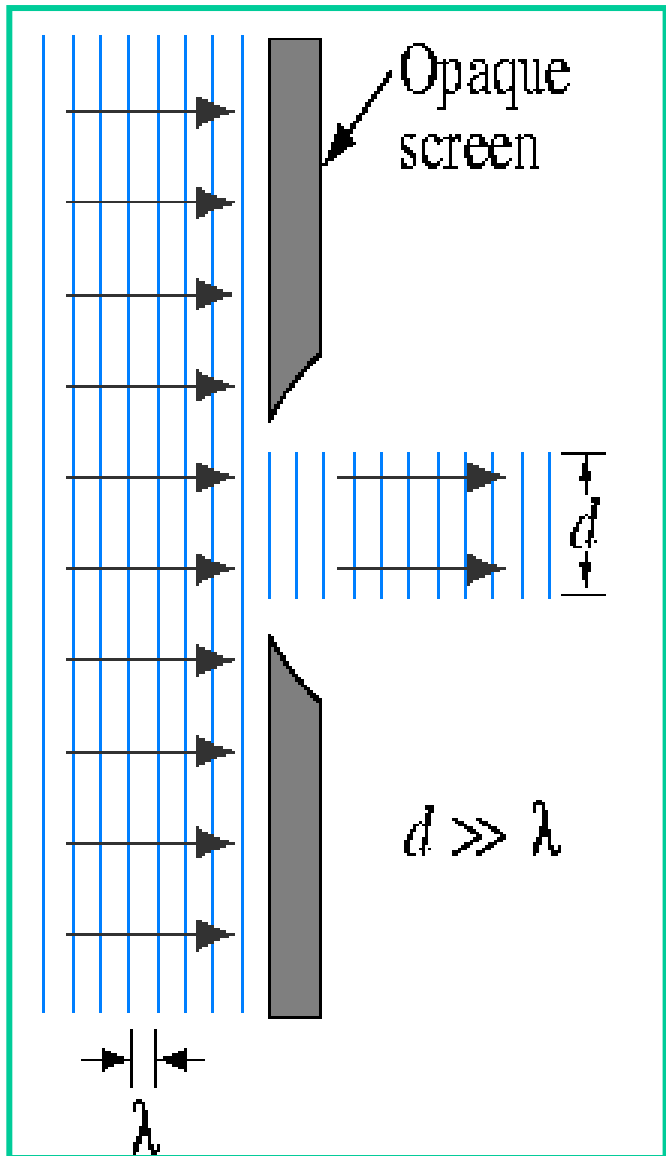


FDTD: esempio di risultati



Potenza irradiata = 1 W
frequenza = 900 MHz

Ottica geometrica



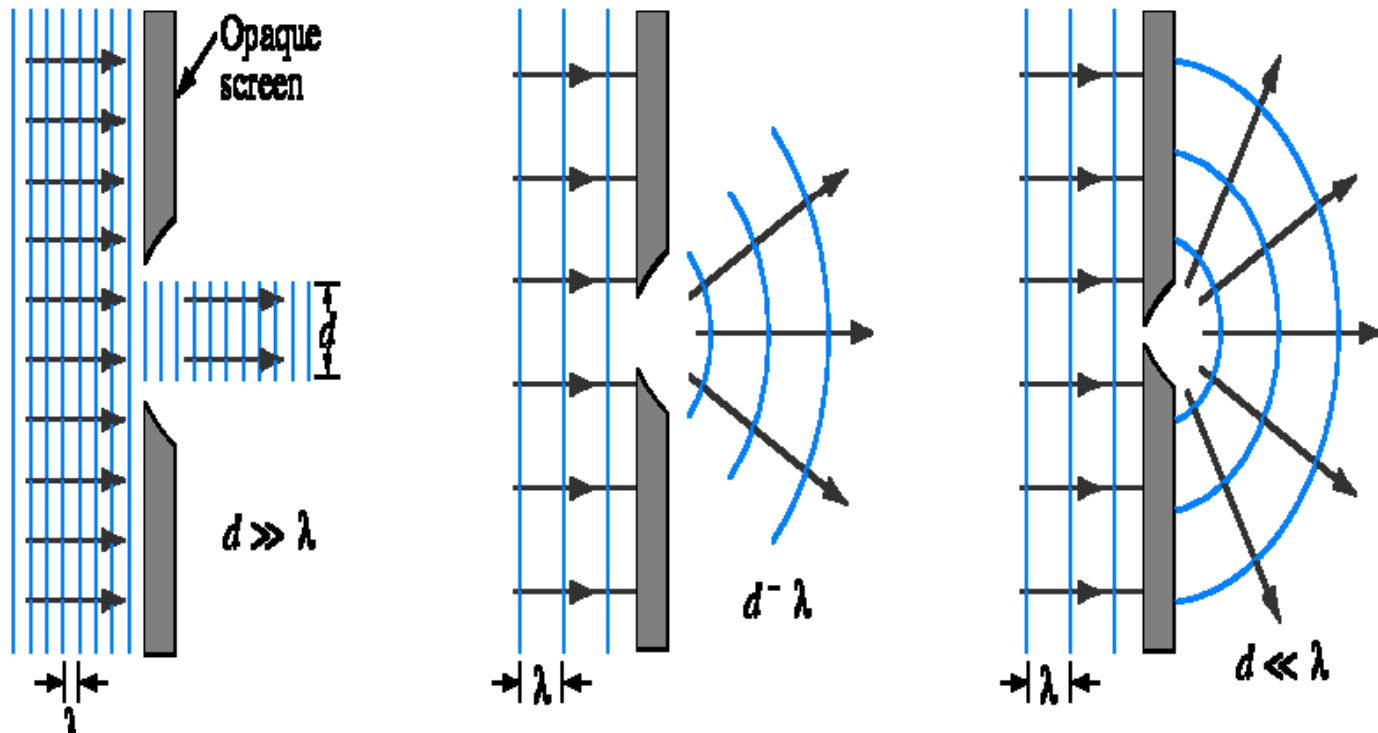
- Nell'ottica geometrica il campo elettromagnetico è rappresentato con un raggio che individua la direzione di propagazione dell'energia;

Per questo si chiama anche "*ray optics*".

- La propagazione è data dalla distanza percorsa dal raggio, con effetti di riflessione e rifrazione;
- Per poter prevedere anche il campo in 'zone d'ombra', correzioni con diffrazione

GO: introduzione

- L'ottica geometrica è stata sviluppata per lo studio della **propagazione della luce nei mezzi**;
- Le sue leggi possono essere derivate rigorosamente dalle equazioni di Maxwell nella condizione: $\lambda \rightarrow 0$;
- negli anni '50 Keller (e altri..) estendono l'ottica geometrica con la teoria geometrica della diffrazione (GTD) in cui si estende il metodo con il calcolo di meccanismi di diffrazione



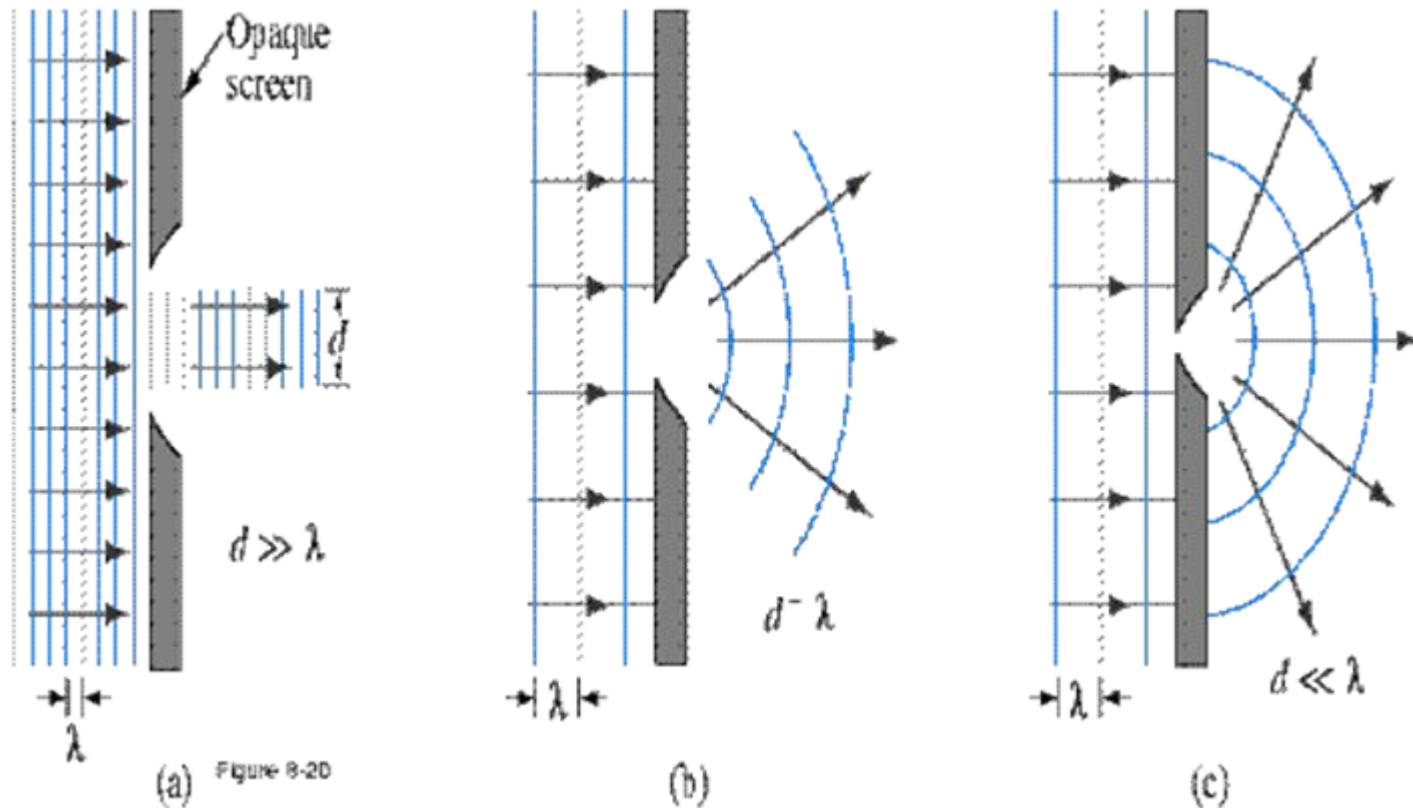
GO: introduzione

Vantaggi:

- è una tecnica molto semplice da applicare;
- permette di comprendere i fenomeni fisici che governano radiazione e scattering dalle diverse parti di una struttura;
- ottiene risultati in buon accordo con misure sperimentali;
- può essere combinata con altre tecniche (e.g. MoM)

GO: introduzione

L'ottica geometrica è un metodo approssimato, valido in alta frequenza, per determinare la propagazione di un'onda em mediante il concetto di campi incidenti, riflessi, rifratti

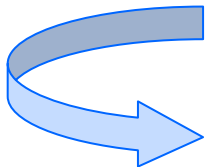


E' derivata dallo studio delle proprietà di propagazione della luce

Un po' di storia....

Tutto cominciò in una fredda mattina....

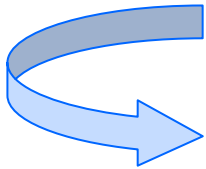
- 330-275 ac - Euclide: legge della riflessione ($\theta = \theta'$);
- tra 200ac e 300 dc - Erone: la luce segue il cammino più breve;
la velocità della luce è finita;
- ca 140 dc - Tolomeo: elabora una prima legge della rifrazione (non c'è il sen...);
- medioevo - Alhazen: dimostra che la legge ricavata da Tolomeo per la rifrazione è valida solo per piccoli angoli;
- 1621 - Snell: ricava quantitativamente la legge della rifrazione;
- 1654 - Fermat: formula il principio per cui la luce si propaga seguendo il cammino il cui tempo di percorrenza è minimo;
- 1824 - 1844 - Hamilton: dimostra il principio di Fermat su basi matematiche



Sono le basi dell'ottica geometrica classica, tutt'ora utilizzate negli studi di ottica (lenti....)

...e la storia continua...

- Già dal 1864 con la formulazione delle equazioni di Maxwell diviene evidente che la luce è un'onda.
- Nell'ottica geometrica classica mancano le informazioni di base dell'onda: fase, polarizzazione, diffrazione

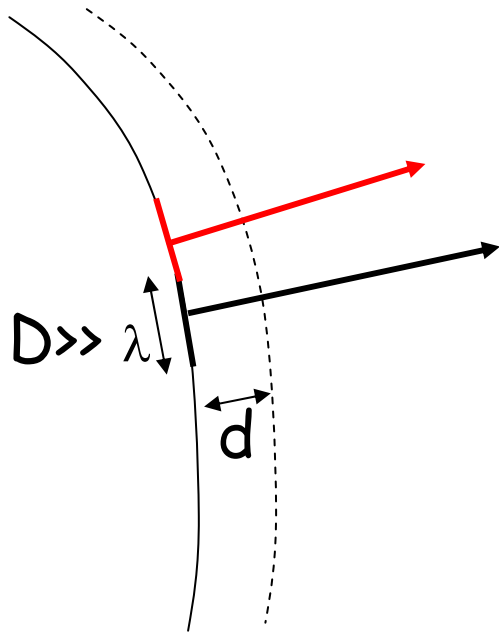


L'ottica geometrica moderna si basa sulla teoria classica unendola però con le proprietà dell'onda elettromagnetica

- ottica geometrica: Luneberg - Kline coprono il 'gap' tra concetti geometrici e equazioni di Maxwell;
- teoria geometrica della diffrazione: Keller introduce i raggi diffratti, con cui si completa l'ottica geometrica nella previsione del campo in zone d'ombra;
- teoria uniforme della diffrazione: Kouyoumjian estende la TGD ai confini delle zone d'ombra

OG: introduzione intuitiva

L'**ottica geometrica** è un metodo approssimato che permette di studiare in modo '**semplice ed intuitivo**' la propagazione di un campo elettromagnetico



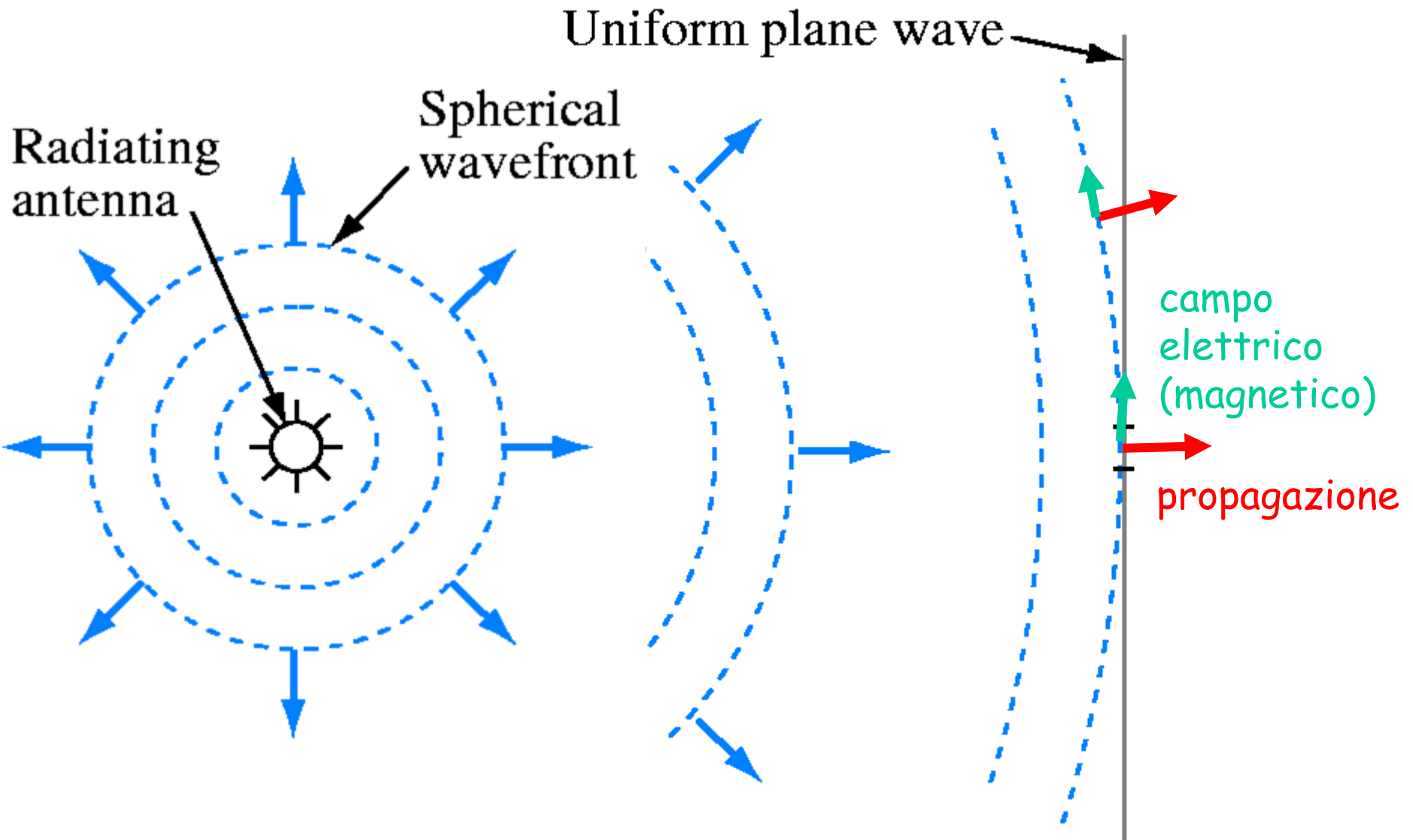
Se un'onda elettromagnetica ha:

- superfici equifase con raggio di curvatura $r \gg \lambda$,
- su queste le variazioni del campo sono significative solo per distanze $\gg \lambda$,

Allora, la superficie equifase si può considerare divisa in tanti elementi piani, di dimensione $D \gg \lambda$, in ognuno dei quali il campo è costante e di tipo **onda piana uniforme** !!

La propagazione avviene lungo i **raggi** che coincidono con le linee di flusso del vettore di Poynting

Onda localmente piana



Propagazione del campo: fase



- Dopo un certo tempo Δt il campo avrà percorso una distanza d data da:

$$d = v_f \Delta t$$

- L'onda, spostandosi lungo il raggio, subirà allora una variazione di fase:

$$\Delta \Phi = \beta d$$

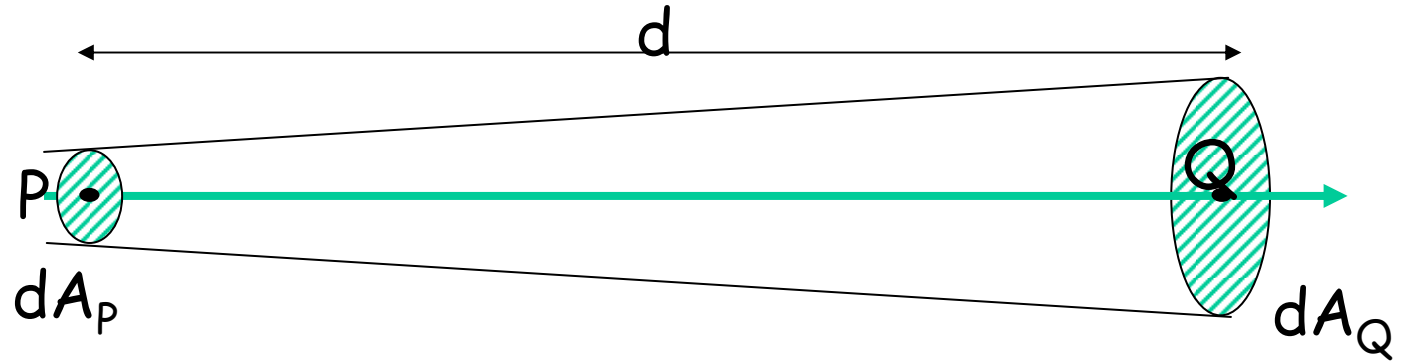
con

$$\beta = \frac{\omega}{v_f} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = \beta_0 n$$

Indice di rifrazione

Propagazione del campo: ampiezza

Considerando un fascio di raggi che attraversa un elemento infinitesimo di superficie equifase (dA_P) intorno al punto P, il fascio di raggi definisce un tubo di flusso per il vettore di Poynting, così che la potenza che attraversa tutte le sue sezioni trasversali è sempre la stessa.



Densità di potenza

$$S_P dA_P = S_Q dA_Q$$

$$S_Q = K_{QP}^2 S_P$$

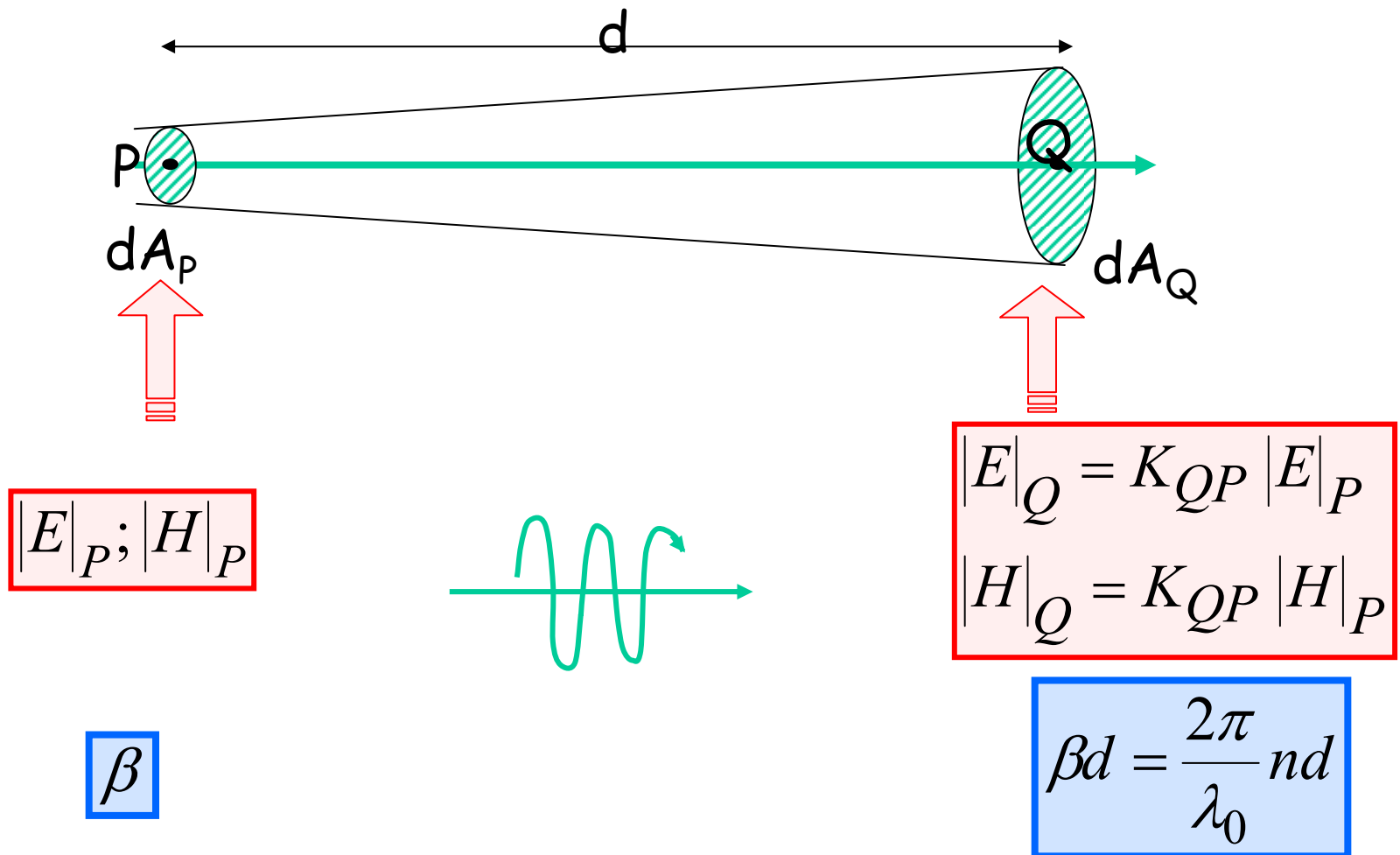
$$K_{QP}^2 = \frac{dA_P}{dA_Q}$$

Fattore di divergenza

$$\begin{aligned} |E|_Q &= K_{QP} |E|_P \\ |H|_Q &= K_{QP} |H|_P \end{aligned}$$

Propagazione del campo

In conclusione ... conoscendo il campo su una superficie equifase si può calcolare il suo andamento al di là della superficie stessa



Calcolo del campo mediante l'OG

Pertanto, per calcolare il campo elettromagnetico mediante l'ottica geometrica, partendo dalla conoscenza del campo su una generica superficie equifase ψ_0 si deve:

1. selezionare un numero discreto di punti sulla superficie ψ_0 ;
2. calcolare per ogni punto il percorso compiuto nell'intervallo Δt :

$$\Delta \ell = v_f \Delta t$$

con

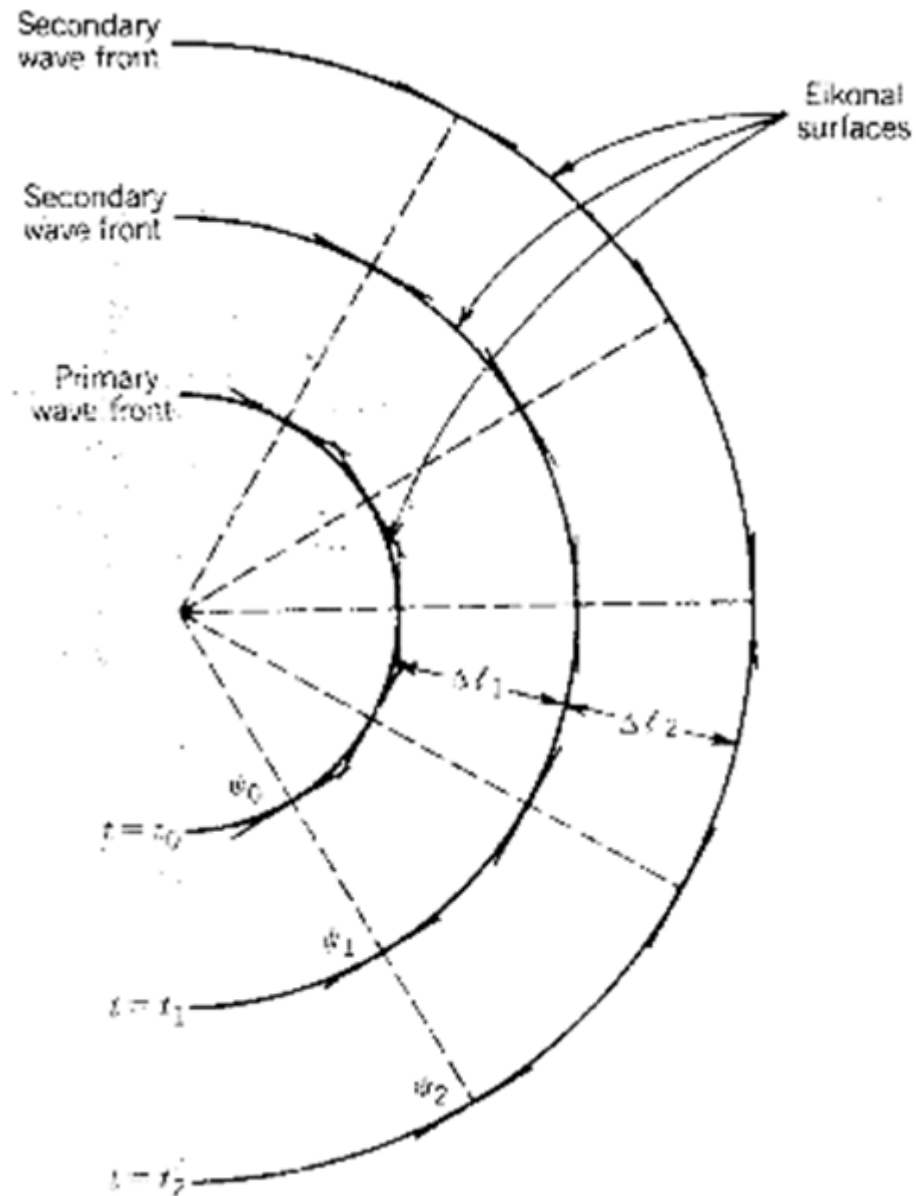
$$v_f = \frac{c}{n}$$

3. tracciare il raggio ortogonale a ψ_0 e lungo $\Delta \ell$;
4. collegare le superfici ortogonali ai raggi per formare il fronte secondario ψ_1

Le ψ_i rappresentano le **superfici iconali**. Le famiglie di curve possono essere ottenute risolvendo l'equazione:

$$|\nabla \Psi_n(s)| = n(s)$$

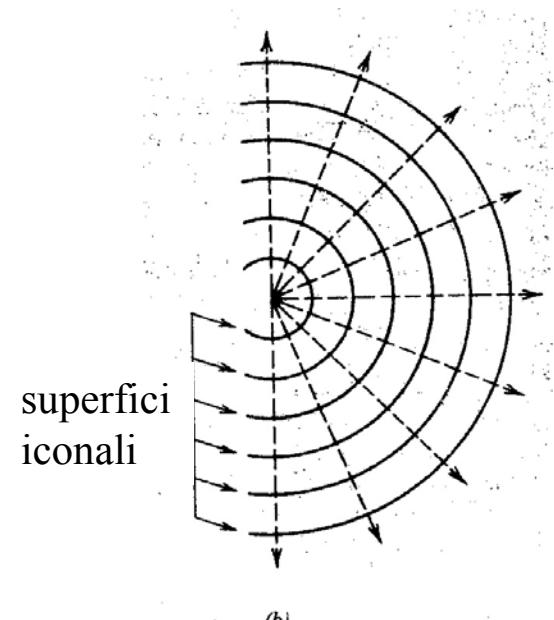
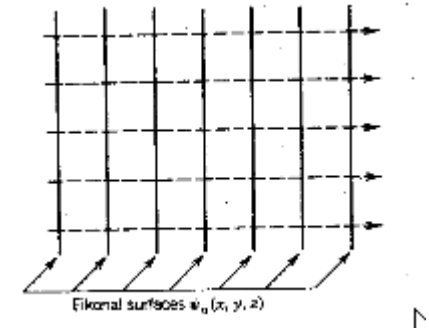
Calcolo superfici iconali



Superfici iconali

Le superfici iconali,

- per onde piane sono dei piani ortogonali alla direzione di propagazione;
- per onde cilindriche sono dei cilindri ortogonali alla direzione di propagazione;
- per onde sferiche sono delle sfere ortogonali alla direzione di propagazione.



Fattore di divergenza

Il fattore di divergenza è dato da:

- per onde piane

$$K = 1$$

- per onde cilindriche

$$K = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 + s}}$$

ρ_0 = raggio di curvatura
superficie a $s=0$

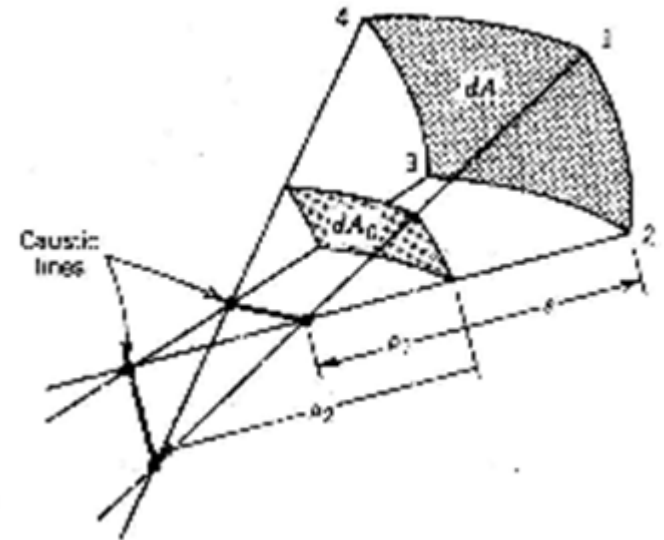
s = distanza percorsa

- per onde sferiche

$$K = \frac{\rho_0}{\rho_0 + s}$$

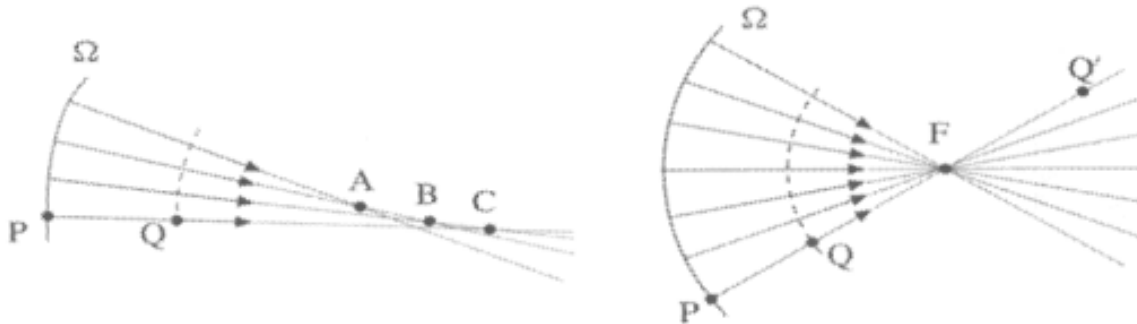
E, in generale,

$$K = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}}$$



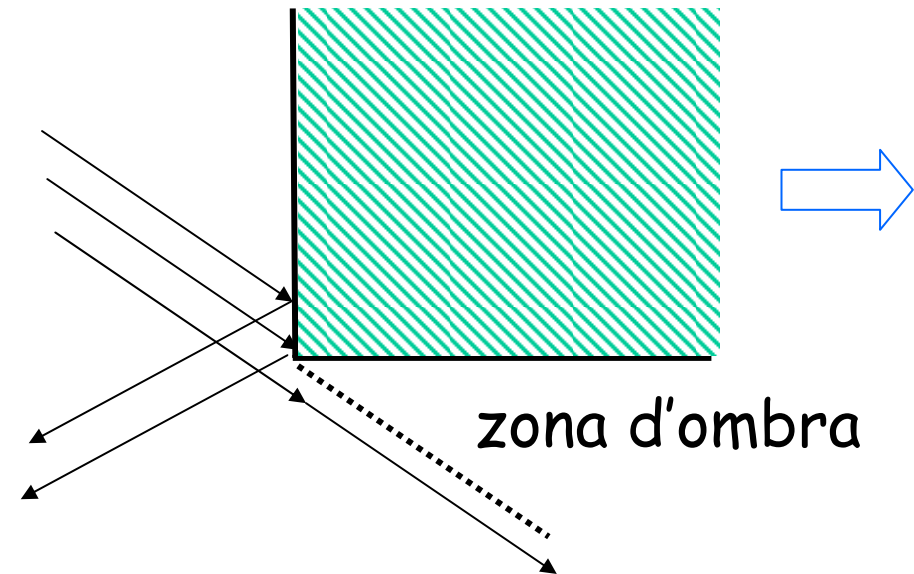
Problema....

- Le equazioni dell'ottica geometrica non sono valide in prossimità dei punti in cui la sezione del fascio infinitesimo preso intorno al raggio considerato, si annulla (superficie iconale astigmatica = non proviene da un punto singolo).
- In questi punti, infatti, passa più di un raggio così che il calcolo del campo diverge.
- Dato un fascio convergente, l'insieme di punti in cui il campo diverge prende il nome di **caustica**; se i raggi convergono tutti in un punto si parla di **fuoco**.



L'ottica geometrica non può essere utilizzata per calcolare il valore del campo in prossimità delle caustiche e dei fuochi.

Problema....



Se si studia la propagazione del campo in presenza di oggetti dielettrici, riflessione e rifrazione possono non essere sufficienti per predire correttamente la distribuzione di campo

L'ottica geometrica viene allora completata mediante la **teoria geometrica della diffrazione** per tener conto di spigoli o vertici, ovvero del fenomeno di diffrazione del campo elettromagnetico.

