

Capitolo 5

*Calcolo del campo elettromagnetico:
ottica geometrica,
la riflessione*

Impatto ambientale dei campi elettromagnetici

Riassumendo

- L'espressione che descrive la propagazione del campo secondo l'ottica geometrica è del tipo:

$$\underline{E}(s) = \underline{E}(0) \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} e^{-jks} e^{j(n-m)\pi/2}$$

dove:

- $\underline{E}(0)$ rappresenta il **campo** (ampiezza, polarizzazione e fase) nel punto di riferimento ($s_0 = 0$);
- s è la **distanza** lungo il raggio dal punto di riferimento, pertanto
- $\exp(-jks)$ esprime lo **sfasamento** lungo la traiettoria;
- il termine sotto radice rappresenta il fattore di **divergenza** del fascio, ovvero le variazioni di ampiezza del campo lungo la traiettoria;
 - ρ_1 e ρ_2 rappresentano i **raggi di curvatura** principali del fascio nel punto di riferimento. La convenzione che si adotta è tale che un raggio di curvatura **positivo** (**negativo**) implica un fascio **divergente** (**convergente**) nel corrispondente piano principale
- $n(m)$ è il numero di **caustiche** attraversate dall'osservatore che si muove lungo la traiettoria nella direzione di (opposta a quella di) propagazione del campo

Riassumendo

- Analoga espressione è valida per il campo magnetico:

$$\underline{H}(s) = \underline{H}(0) \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} e^{-jks} e^{j(n-m)\pi/2}$$

Inoltre, campo elettrico e campo magnetico sono **localmente** legati dalle relazioni tipiche di un'onda piana:

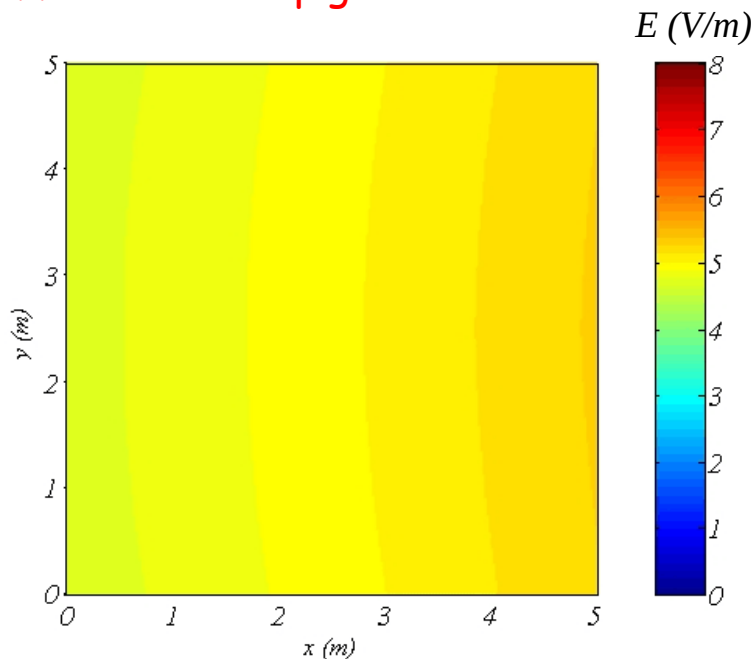
$$\underline{E}_0(\underline{r}) = \zeta \underline{H}_0(\underline{r}) \times \nabla \Psi(\underline{r})$$

$\underline{E}_0, \underline{H}_0, \nabla \Psi$ formano una terna ortogonale destra

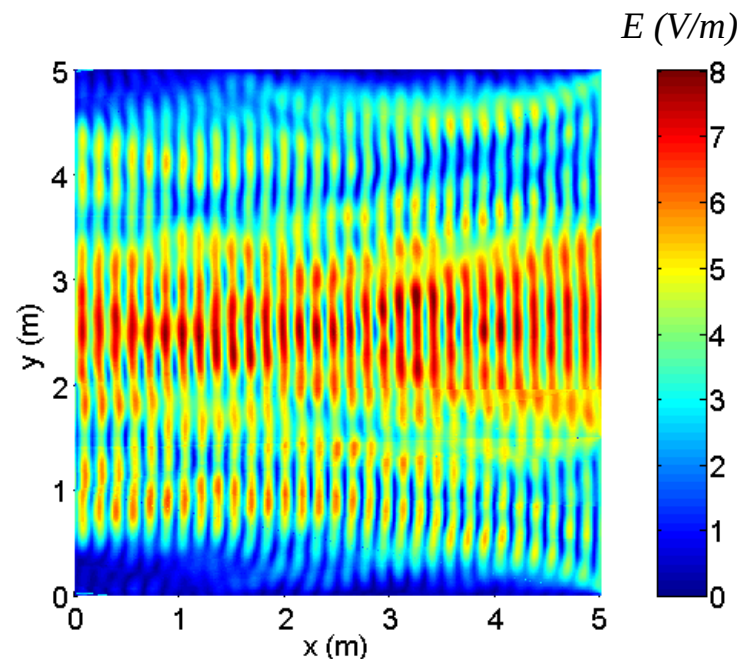
$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \zeta$$

Propagazione in presenza di oggetti dielettrici

- L'ottica geometrica vista fin'ora considera la propagazione del campo elettromagnetico nello spazio libero (i.e. senza confini).
- Quando un oggetto è presente nella regione di interesse, il campo elettromagnetico genera correnti su di esso, le quali, a loro volta, generano un campo elettromagnetico diffuso (scatterato).
- Il calcolo del campo elettromagnetico totale vorrebbe la soluzione completa delle equazioni di Maxwell. Tuttavia, se gli oggetti in questione sono di dimensioni sufficientemente estese (i.e. parecchie lunghezze d'onda), allora l'uso ancora una volta di tecniche asintotiche permette la valutazione del campo distinguendo tra diverse caratteristiche geometriche. In particolare, si possono prendere in esame diversi processi, quali **riflessione da superfici e diffrazione da spigoli**.

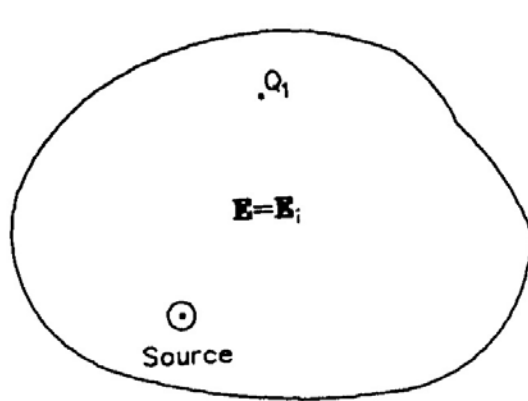


GSM900: spazio libero

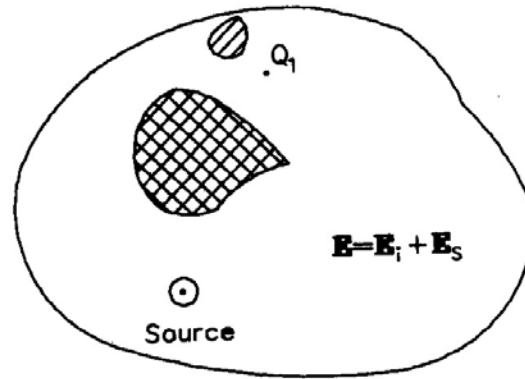


GSM900: stanza vuota con finestra

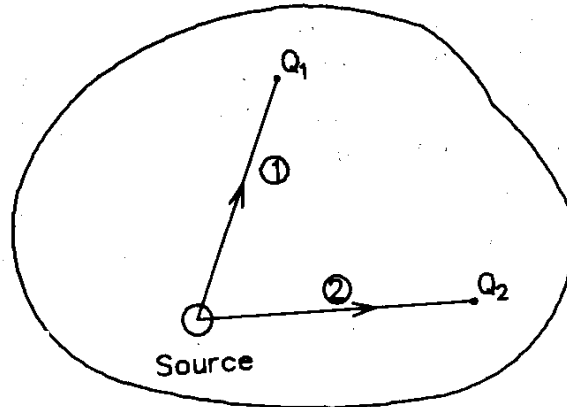
Campo incidente: em vs o.g.



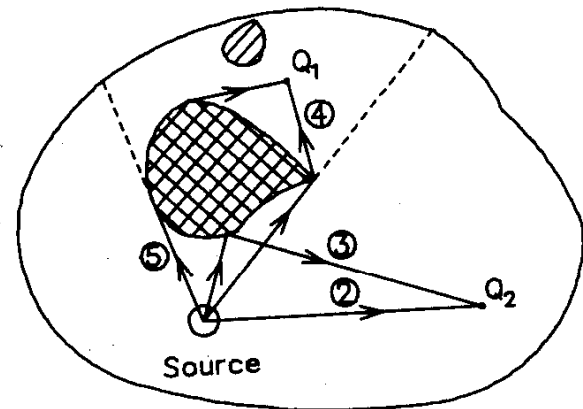
(a)



(b)



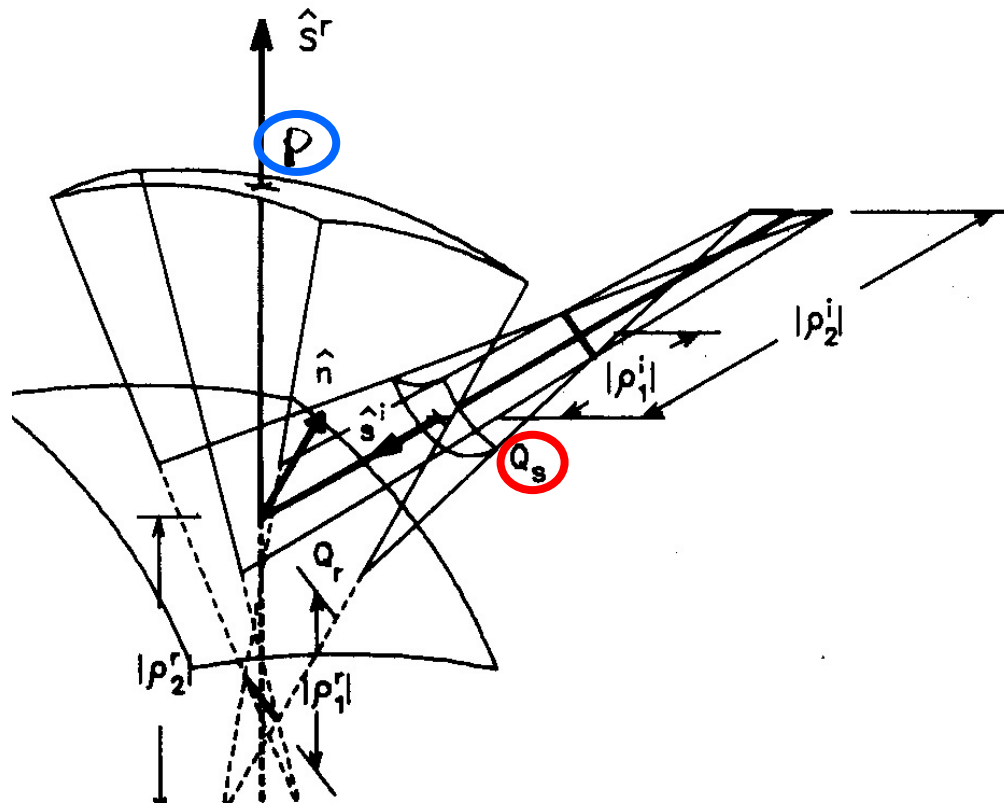
(a)



(b)

Riflessione

- Primo passo è quello di prendere in esame il processo di riflessione da superfici curve (lisce).
- Scopo è quello di valutare il campo elettromagnetico ad un punto P dopo la riflessione su una superficie, conoscendo il campo nel punto Q_s di riferimento.



Campo riflesso

- Il campo nel punto P sarà esprimibile come:

$$\underline{E}^r(P) = \underline{E}^r(Q_r) \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^r}$$

dove

- Q_r rappresenta il punto in cui avviene la riflessione sulla superficie,
- s^r rappresenta la distanza del punto P di osservazione dal punto Q_r ,
- $\rho_1^r \rho_2^r$ rappresentano i raggi di curvatura principale del tubo di raggi riflesso al punto Q_r .

Il campo incidente in Q_r sarà dato da:

$$\underline{E}^i(Q_r) = \underline{E}^i(Q_s) \sqrt{\frac{\rho_1^i \rho_2^i}{(\rho_1^i + s^i)(\rho_2^i + s^i)}} e^{-jks^i}$$

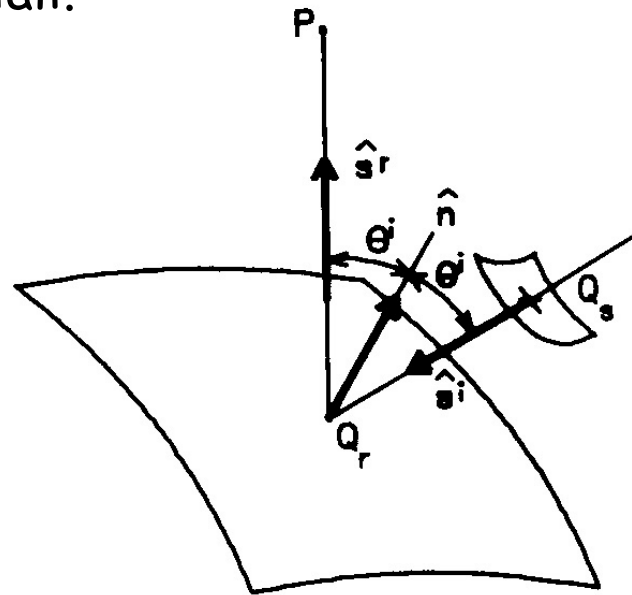
con analogo significato dei simboli rispetto al punto di riferimento Q_s .

Coefficiente di riflessione

- Il legame tra il campo incidente e quello riflesso al punto Q_r sarà dato dal coefficiente di riflessione R della superficie nel punto

$$\underline{\underline{E}}^r(Q_r) = \underline{\underline{E}}^i(Q_r) \cdot \underline{\underline{R}}$$

dove R sarà in generale una quantità diadica (i.e. una matrice) essendo $\underline{E}^i$ ed $\underline{E}^r$ due quantità vettoriali.



Calcolo del campo riflesso

In conclusione, per valutare il campo riflesso da una superficie bisogna:

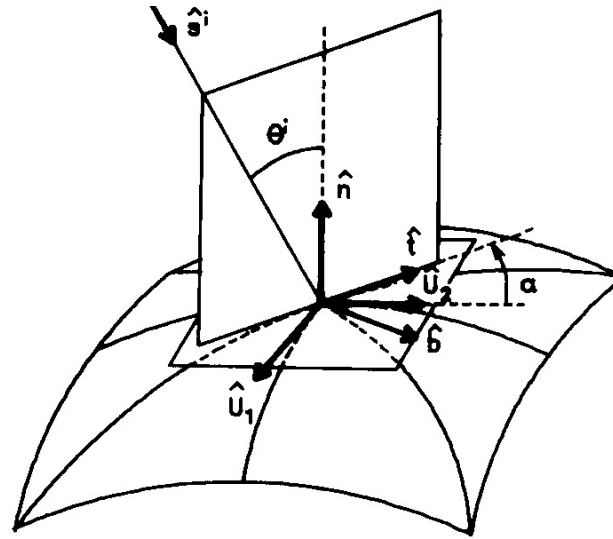
1. dati il punto di partenza Q_s ed il punto di osservazione P , si deve determinare il punto di incidenza sulla superficie;
2. determinare il coefficiente di riflessione locale della superficie;
3. dalle proprietà nel punto di incidenza del fronte d'onda incidente, si determinano i raggi di curvatura principali del fronte d'onda riflesso.

1

Il punto di incidenza Q_r è determinato dal principio di Fermat generalizzato: il percorso ottico deve essere un estremo (quindi o un massimo o un minimo a seconda delle proprietà della superficie riflettente)

Legge della riflessione - coordinate locali

Sulla superficie di riflessione, possono definirsi due piani principali, a cui corrispondono i raggi di curvatura principali della superficie



Dato il punto Q_r sulla superficie, rimane univocamente determinato il versore $\hat{n}$, normale alla superficie nel punto considerato. Si consideri ora un piano che intersechi la superficie nel punto considerato e contenente il versore normale. Tale piano individua sulla superficie una curva che prende il nome di *normal section curve*, a cui rimane associato un raggio di curvatura. Se il piano viene ruotato, diverse *normal section curves* vengono generate. Si può dimostrare che, per ogni *well behaved surface*, esiste un piano di intersezione che massimizza il raggio di curvatura, e uno che lo minimizza. Tali raggi vengono definiti **raggi di curvatura principali** e i due piani corrispondenti **piani principali**. Sulle curve corrispondenti potranno definirsi i versori $\hat{u}_1$ ed $\hat{u}_2$.

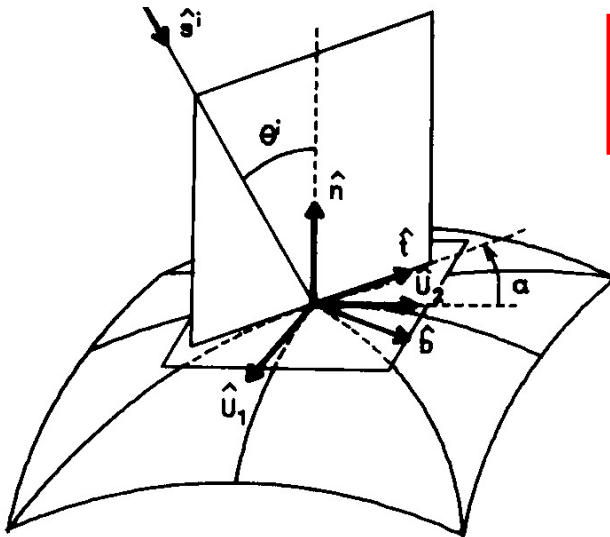
Piano di incidenza

- Considerato un generico tubo di raggi il cui raggio centrale incide sulla superficie a Q_r con il versore del raggio individuato da $\hat{s}^i$, il piano individuato da $\hat{s}^i$ e dalla normale al punto di incidenza viene definito piano di incidenza.
- L'angolo di incidenza θ^i sarà dato da:

$$\theta^i = -\arccos(\hat{n} \cdot \hat{s}^i)$$

- Rimane definito, inoltre, un versore tangente alla superficie (intersezione del piano di incidenza con la superficie) e tale che

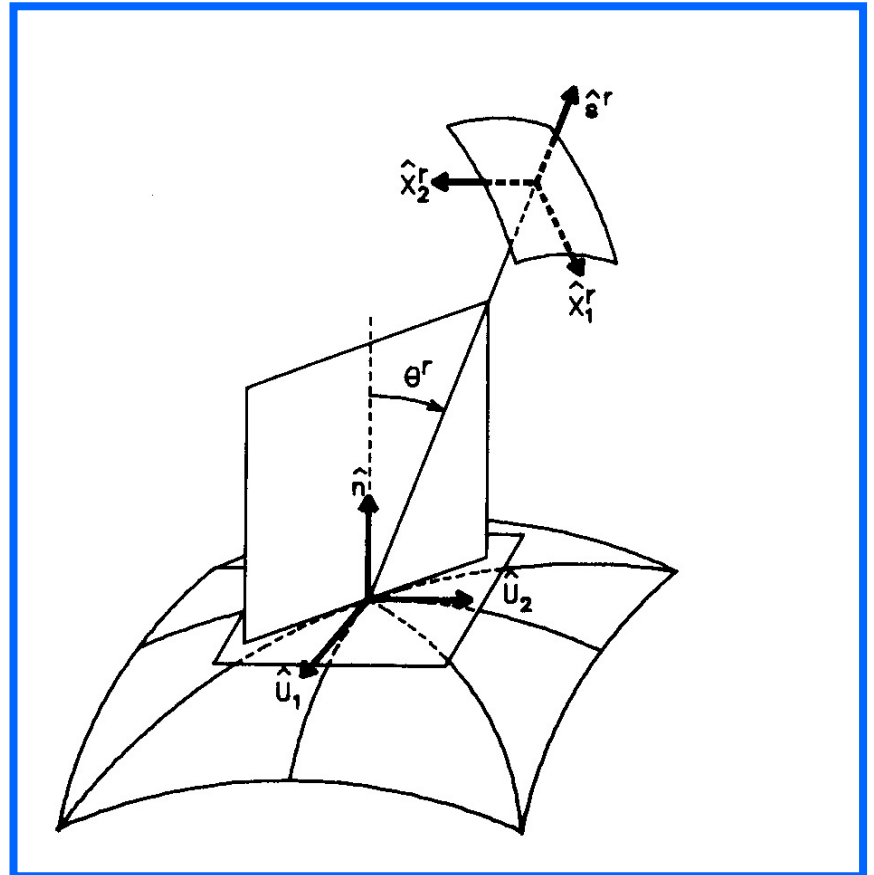
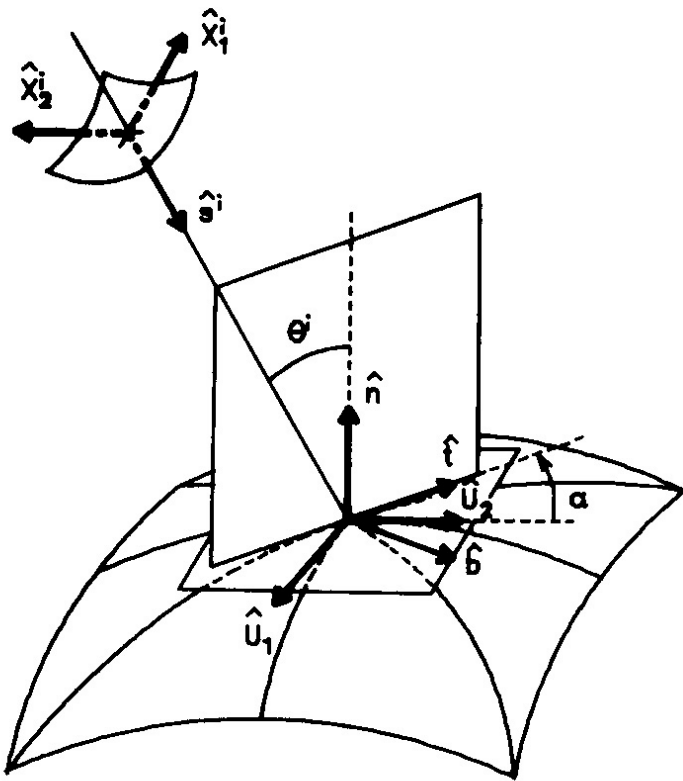
$$\cos(\alpha) = \hat{U}_2^i \cdot \hat{t}$$



Direzioni principali dei fronti d'onda

In modo analogo a quanto detto per la superficie di riflessione, si possono definire i piani principali, i raggi di curvatura principali, e i corrispondenti versori (i.e. direzioni) principali, anche per i fronti d'onda del campo incidente e riflesso.

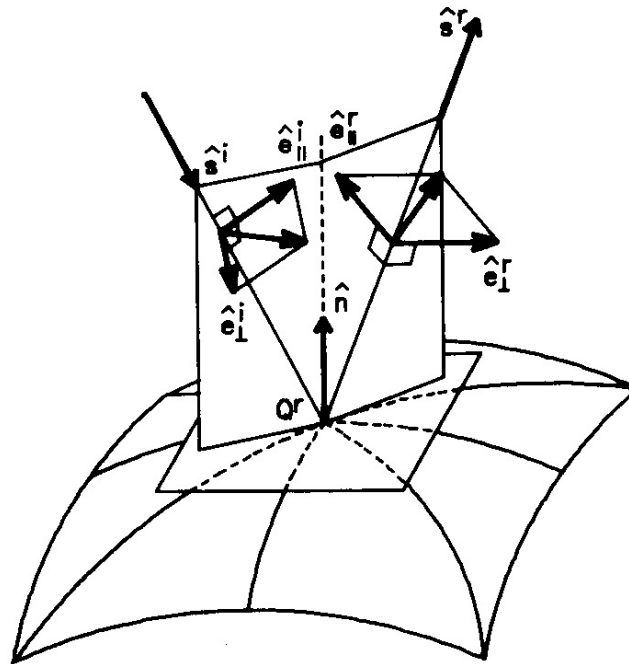
Tutto con riferimento al punto Q_r .



Sistema di coordinate locali: polarizzazione del raggio

Il campo elettrico incidente su Q_r si potrà sempre decomporre in una componente **parallela ed una perpendicolare al piano di incidenza**.

Analogamente, il campo riflesso si potrà decomporre in una componente **parallela ed una perpendicolare al piano di riflessione**.



Sarà: $\underline{E}^i(Q_r) = \hat{e}_{//}^i E_{//}^i(Q_r) + \hat{e}_{\perp}^i E_{\perp}^i(Q_r)$ con $\hat{e}_{//}^i = \hat{e}_{\perp}^i \times \hat{s}^i$

La legge della riflessione

Per dimostrare il legame tra campo incidente e riflesso secondo le notazioni dell'ottica geometrica, si farà riferimento ad una superficie perfettamente **conduttrice**.

Dato un campo incidente noto, per determinare il campo riflesso si deve imporre la condizione al contorno sulla superficie di riflessione:

$$\hat{n} \times \underline{E}(\underline{r}) = 0 \quad \forall \underline{r} \in S$$

dove E rappresenta il campo totale nel primo mezzo, dato dalla somma tra campo incidente e riflesso.

$$\hat{n} \times \underline{E}^i(\underline{r}) = -\hat{n} \times \underline{E}^r(\underline{r}) \quad \forall \underline{r} \in S$$

Sostituendo nella condizione le espressioni dei campi secondo lo sviluppo di Luneberg-Kline, si ottiene,

La legge della riflessione (2)

$$\hat{n} \times \underline{E}^i(\underline{r}) = -\hat{n} \times \underline{E}^r(\underline{r}) \quad \forall \underline{r} \in S$$

$$\underline{E}(\underline{r}, \omega) = e^{-jk\Psi(\underline{r})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\underline{E}_m(\underline{r})}{(j\omega)^m}$$

$$\hat{n} \times e^{-jk\Psi_i(\underline{r})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\underline{E}_m^i(\underline{r})}{(j\omega)^m} = -\hat{n} \times e^{-jk\Psi_r(\underline{r})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\underline{E}_m^r(\underline{r})}{(j\omega)^m}$$

uguagliando le uguali potenze di $j\omega$

$$\Psi_i(\underline{r}) = \Psi_r(\underline{r})$$

$$\hat{n} \times \underline{E}_m^i(\underline{r}) = -\hat{n} \times \underline{E}_m^r(\underline{r})$$

$$\forall \underline{r} \in S$$

La legge della riflessione (3)

Dall'uguaglianza delle fasi segue:

$$\Psi_i(\underline{r}) = \Psi_r(\underline{r})$$

Poiché le fasi devono essere uguali in tutti i punti della superficie, ne segue che anche le derivate delle ψ_i e ψ_r **lungo la superficie** saranno uguali. Allora, se si considera il versore tangente alla superficie di riflessione contenuto nel piano di incidenza, si avrà:

$$\nabla \Psi_i(Q_r) \cdot \hat{t}(Q_r) = \nabla \Psi_r(Q_r) \cdot \hat{t}(Q_r)$$

$$\hat{s}^i \cdot \hat{t}(Q_r) = \hat{s}^r \cdot \hat{t}(Q_r)$$

piano di incidenza
e di riflessione
coincidono!!!!

$$\hat{s}^i \cdot \hat{t}(Q_r) = \sin(\theta_i) \quad \hat{s}^r \cdot \hat{t}(Q_r) = \sin(\theta_r)$$

$$\sin(\theta^i) = \sin(\theta^r) \Rightarrow \theta^i = \theta^r$$

Inoltre, poiché $\hat{s}_i$ ed $\hat{s}_r$ sono dei versori, ne segue necessariamente

$$|\hat{s}^i \cdot \hat{n}(Q_r)| = |\hat{s}^r \cdot \hat{n}(Q_r)|$$

Traiettorie dei raggi riflessi

Dalle relazioni trovate per i versori dei raggi incidente e riflesso si può determinare univocamente la direzione dei raggi riflessi nota la direzione dei raggi incidenti. Infatti,

$$\hat{s}^i = (\hat{s}^i \cdot \hat{n})\hat{n} + (\hat{s}^i \cdot \hat{t})\hat{t}$$

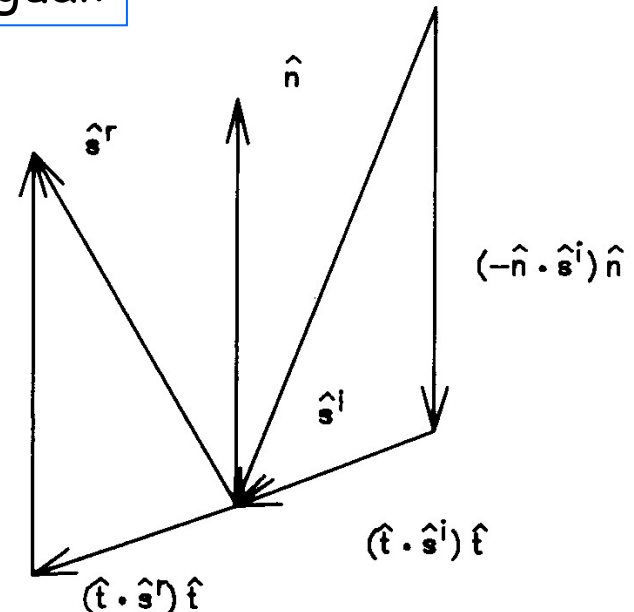
$$\hat{s}^r = (\hat{s}^r \cdot \hat{n})\hat{n} + (\hat{s}^r \cdot \hat{t})\hat{t}$$

opposti

uguali

$$\hat{s}^r = -(\hat{s}^i \cdot \hat{n})\hat{n} + (\hat{s}^i \cdot \hat{t})\hat{t}$$

$(-\hat{n} \cdot \hat{s}^i)\hat{n}$



Polarizzazione

- Poiché piano di incidenza e riflessione coincidono, ne segue

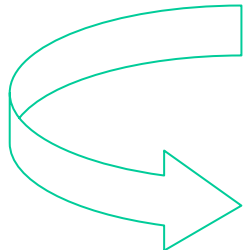
$$\boxed{\hat{e}_{\perp}^i = \hat{e}_{\perp}^r} \implies \boxed{\hat{n} \times \hat{e}_{\perp}^i = \hat{n} \times \hat{e}_{\perp}^r}$$

- mentre ciò non sarà in generale vero per i versori paralleli al piano di incidenza. Si può però scrivere,

$$\hat{n} \times \hat{e}_{//}^i = \hat{n} \times (\hat{e}_{\perp}^i \times \hat{s}^i) = \hat{e}_{\perp}^i (\hat{n} \cdot \hat{s}^i) - \hat{s}^i (\hat{n} \cdot \hat{e}_{\perp}^i) = -\hat{e}_{\perp}^i \cos(\theta^i)$$

$$\boxed{\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}(\underline{A} \cdot \underline{B})}$$

$$\hat{n} \times \hat{e}_{//}^r = \hat{n} \times (\hat{e}_{\perp}^r \times \hat{s}^r) = \hat{e}_{\perp}^r (\hat{n} \cdot \hat{s}^r) - \hat{s}^r (\hat{n} \cdot \hat{e}_{\perp}^r) = \hat{e}_{\perp}^r \cos(\theta^r)$$



$$\boxed{\hat{n} \times \hat{e}_{//}^r = \hat{e}_{\perp}^i \cos(\theta^i) = -\hat{n} \times \hat{e}_{//}^i}$$

ortogonali...

Coefficiente di riflessione

Dalla condizione al contorno segue per il campo di ottica geometrica

$$\hat{n} \times \underline{E}_0^i(\underline{r}) = -\hat{n} \times \underline{E}_0^r(\underline{r})$$

$$\hat{n} \times [\hat{e}_{//}^i E_{//}^i(Q_r) + \hat{e}_{\perp}^i E_{\perp}^i(Q_r)] = -\hat{n} \times [\hat{e}_{//}^r E_{//}^r(Q_r) + \hat{e}_{\perp}^r E_{\perp}^r(Q_r)]$$

$$\hat{n} \times \hat{e}_{//}^i E_{//}^i(Q_r) + \hat{n} \times \hat{e}_{\perp}^i E_{\perp}^i(Q_r) = -\hat{n} \times \hat{e}_{//}^r E_{//}^r(Q_r) - \hat{n} \times \hat{e}_{\perp}^r E_{\perp}^r(Q_r)$$

$$\hat{n} \times \hat{e}_{//}^i [E_{//}^i(Q_r) - E_{//}^r(Q_r)] + \hat{n} \times \hat{e}_{\perp}^i [E_{\perp}^i(Q_r) + E_{\perp}^r(Q_r)] = 0$$

uguagliando i singoli termini (le due componenti sono tra loro ortogonali..)

$$E_{//}^i(Q_r) = E_{//}^r(Q_r)$$

$$E_{\perp}^i(Q_r) = -E_{\perp}^r(Q_r)$$

Il coefficiente di riflessione risulta allora:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Coefficiente riflessione (2)

- E' facile riconoscere nelle componenti ortogonale e parallela del campo incidente le **componenti orizzontale e verticale** delle onde piane uniformi incidenti alla superficie piana di separazione tra due mezzi.
- I risultati ottenuti si possono allora generalizzare ad una qualunque superficie di separazione tra due mezzi, sostituendo a 1 e -1 i **coefficienti di riflessione**, rispettivamente, per polarizzazione parallela e verticale.
- La trattazione può essere estesa grazie alle proprietà di onda **localmente piana** tipiche dell'ottica geometrica.

Campo riflesso

2

$$\underline{E}^r(s) = \underline{E}^i(Q_r) \underline{R} \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^r}$$

Campo nel "punto di riferimento"

Coefficiente di riflessione

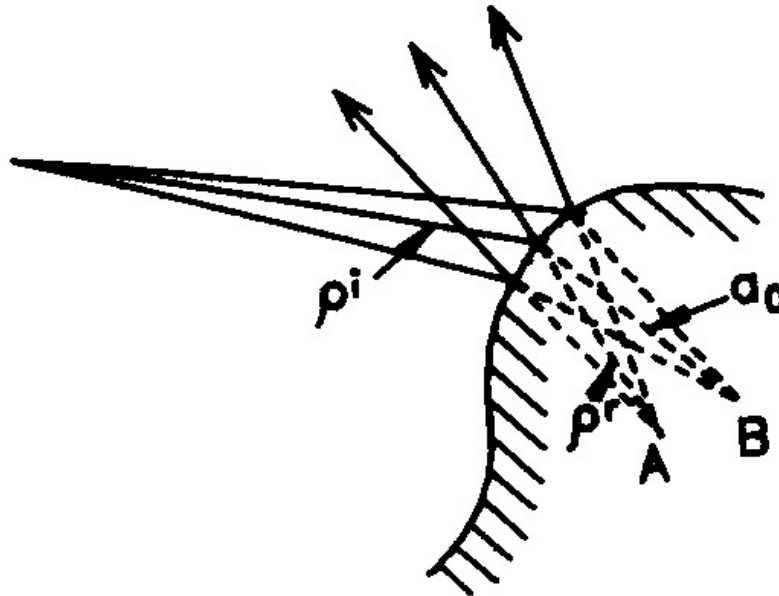
Attenuazione spaziale per fattore divergenza

Fattore di fase

Mancano da definire i raggi di curvatura del fronte d'onda riflesso

Raggi di curvatura del campo riflesso

- Il calcolo dei raggi di curvatura del campo riflesso è piuttosto lungo e laborioso;
- si basa su valutazioni geometriche;
- per illustrarlo, si può considerare il caso **bidimensionale**

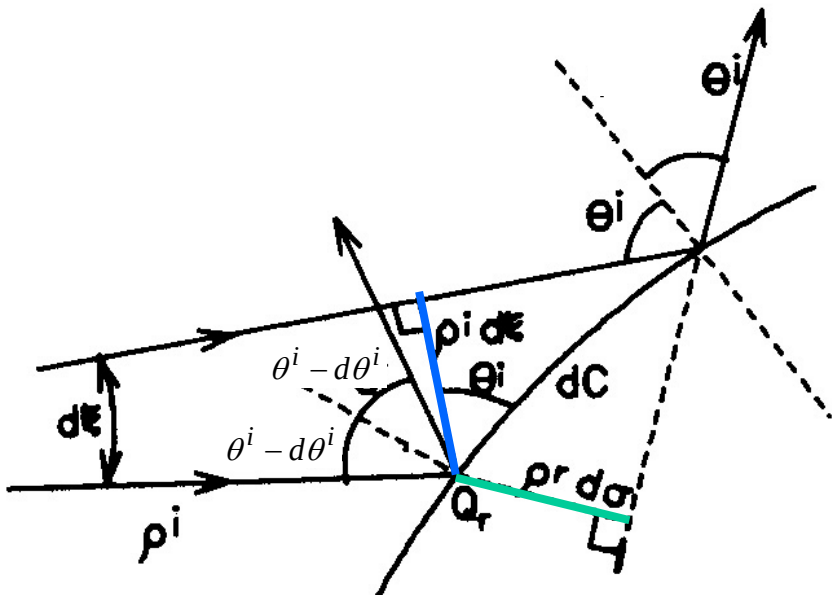
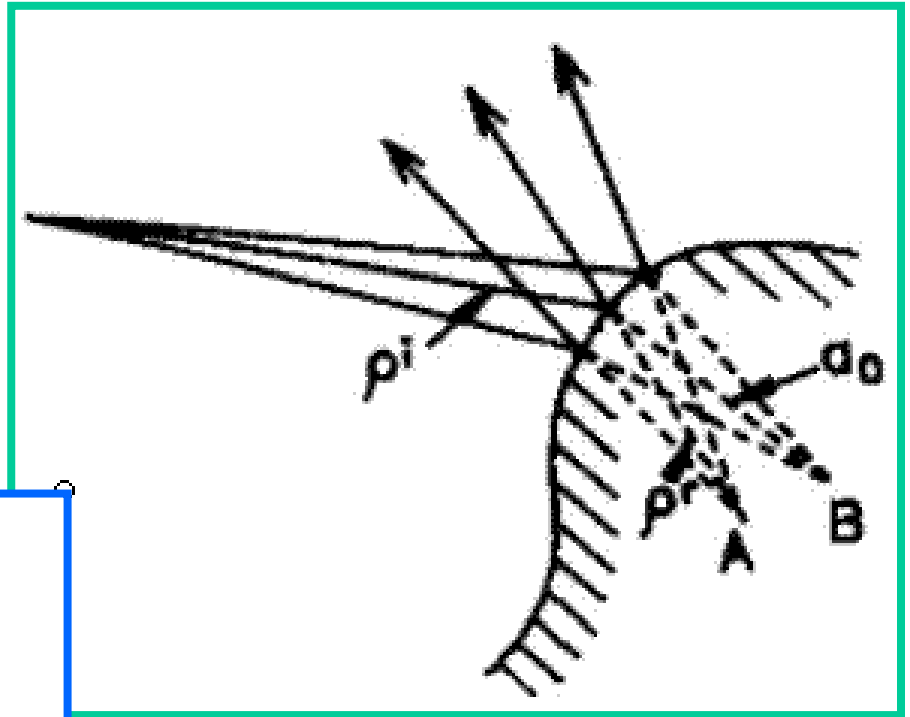


- ρ_i è il raggio di curvatura (uno, siamo in 2D) del fronte d'onda incidente;
- ρ_r è il raggio di curvatura del fronte d'onda riflesso;
- a_0 è il raggio di curvatura della superficie riflettente nel punto di incidenza (approssimata nell'intorno di tale punto con un arco circolare);

un po' di geometria....

$$dC = a_0 d\phi$$

$$dC \cos \theta^i = \rho^i d\xi$$



$$dC \cos \theta^i = \rho^r d\sigma$$

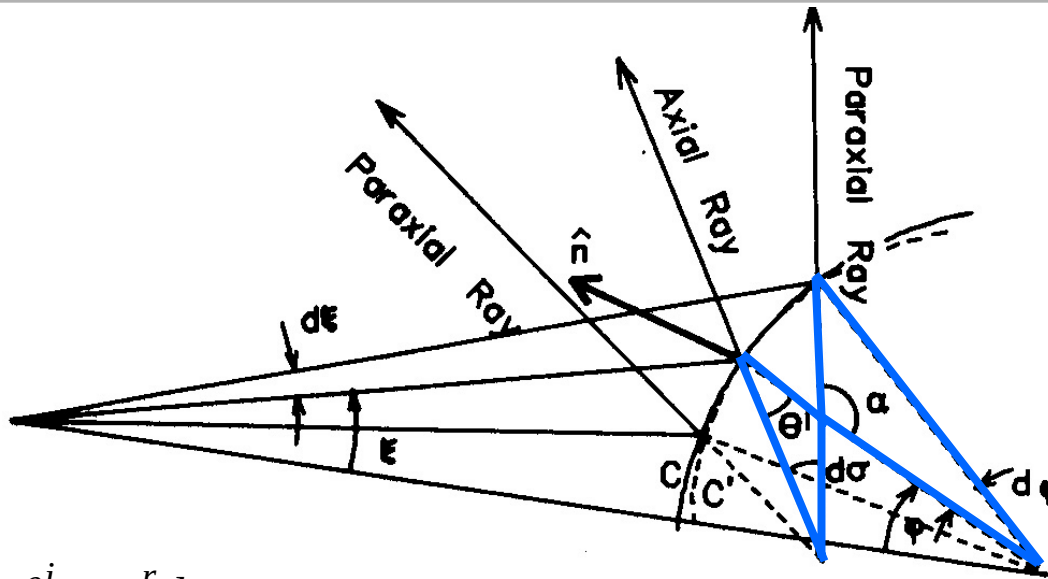
La somma degli angoli di un triangolo è 180°

$$dC = \frac{\rho^i (d\theta^i - d\phi)}{\cos \theta^i} = a_0 d\phi$$

$$d\xi = d\theta^i - d\phi$$

$$d\phi = \frac{\rho^i d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i + \rho^i}$$

un po' di geometria....(3)



$$dC \cos \theta^i = \rho^r d\sigma$$

La somma degli angoli di un triangolo è 180°

$$dC = \frac{\rho^r (d\theta^i + d\phi)}{\cos \theta^i} = a_0 d\phi$$

$$\alpha + d\sigma + \theta^i = \alpha + (\theta^i + d\theta^i) + d\phi$$

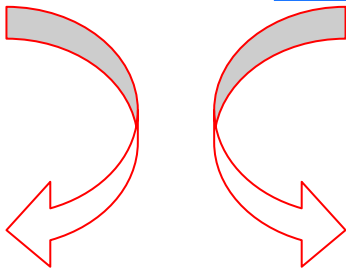
$$d\sigma = d\theta^i + d\phi$$

$$d\phi = \frac{\rho^r d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i - \rho^r}$$

e infine...

$$d\phi = \frac{\rho^i d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i + \rho^i}$$

$$d\phi = \frac{\rho^r d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i - \rho^r}$$


$$\frac{\rho^i d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i + \rho^i} = \frac{\rho^r d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i - \rho^r}$$

3

$$\frac{1}{\rho^r} = \frac{1}{\rho^i} + \frac{2}{a_0 \cos \theta^i}$$

Campi riflessi da superfici 3D

3.5.2 Principal Radii of Curvature of Reflected Ray Tube at Q_r —First Format

The expressions for the principal radii of curvature at Q_r of the reflected wavefront were shown by Kouyoumjian and Pathak [2] to be of the form:

$$\frac{1}{\rho_1^r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_1^i} + \frac{1}{\rho_2^i} \right] + \frac{1}{f_1} \quad (3.206)$$

$$\frac{1}{\rho_2^r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_1^i} + \frac{1}{\rho_2^i} \right] + \frac{1}{f_2} \quad (3.207)$$

where

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{1,2}} = & \frac{\cos \theta^i}{(\det[\Gamma])^2} \left[\frac{(\Gamma_{22})^2 + (\Gamma_{12})^2}{a_1} \right. \\ & \left. + \frac{(\Gamma_{21})^2 + (\Gamma_{11})^2}{a_2} \right] \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i} \right) \frac{4 \cos \theta^i}{(\det[\Gamma])^2} \times \left[\frac{(\Gamma_{22})^2 - (\Gamma_{12})^2}{a_1} + \frac{(\Gamma_{21})^2 - (\Gamma_{11})^2}{a_2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{4 \cos^2 \theta^i}{(\det[\Gamma])^4} \left[\frac{(\Gamma_{22})^2 + (\Gamma_{12})^2}{a_1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\Gamma_{21})^2 + (\Gamma_{11})^2}{a_2} \right]^2 - \frac{4 (\det[\Gamma])^2}{a_1 a_2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.208)$$

in which the plus sign is associated with f_1 and the minus sign with f_2 . The Γ_{ij} are defined in (3.183).

3.5.3 Principal Radii of Curvature of Reflected Ray Tube at Q_r —Second Format

An alternative (though entirely consistent) form of the expressions for ρ_1^r and ρ_2^r have been provided by Pathak, Burnside, and Marhefka [7]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{1,2}^r} = & \frac{1}{\rho_m^i} + \frac{f}{a_t \cos \theta^i} \left\{ 1 \pm \left[\frac{a_t^2 \cos^2 \theta^i}{4f^2} \left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i} \right)^2 \right. \right. \\ & + \frac{a_t^2 \cos \theta^i}{f^2} \left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i} \right) \left[\frac{g \cos^2 \delta}{a_t} \right. \\ & \left. \left. - \sin 2\delta \sin 2\alpha \cos \theta^i \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \right] \right. \\ & \left. \left. + 1 - \frac{4a_t^2 \cos^2 \theta^i}{f^2 a_1 a_2} \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (3.209)$$

in which the plus sign is associated with ρ_1^r and the minus sign with ρ_2^r . The term ρ_m^i is

$$\frac{1}{\rho_m^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \quad (3.210)$$

where the subscript m indicates the mean radius of curvature of the incident wavefront at Q_r . Other terms are

$$f = 1 + \frac{a_t}{a_b} \cos^2 \theta^i \quad (3.211)$$

$$g = 1 - \frac{a_t}{a_b} \cos^2 \theta^i \quad (3.212)$$

and a_t and a_b are defined in (3.203) and (3.204), respectively. The advantage of this second format is that the role of the radii of curvature a_t and a_b , as well as the angle δ , are shown explicitly.

(2)

Problema.....

La formula per ottenere la distanza dalla caustica per il raggio riflesso (e.g. nel caso 2D)

$$\frac{1}{\rho^r} = \frac{1}{\rho^i} + \frac{2}{a_0 \cos \theta^i}$$

quando l'angolo di incidenza θ^i è prossimo a 90° , il $\cos \theta^i$ diviene nullo. Pertanto, il secondo membro della relazione diviene molto elevato e il valore di ρ^r approssima lo 0.

Allora, per **grazing incidence**, il punto di incidenza (punto di riferimento per il raggio riflesso) diviene prossimo alla caustica del raggio riflesso.

Ma in corrispondenza delle caustiche l'ottica geometrica fallisce la valutazione del campo....