

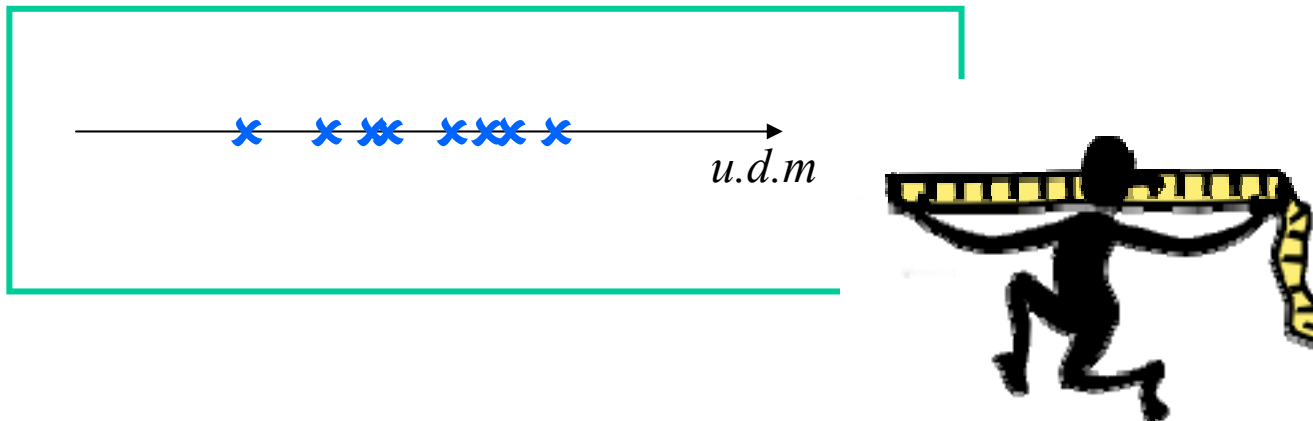
Capitolo 15

Incertezza della misura

Impatto ambientale dei campi elettromagnetici

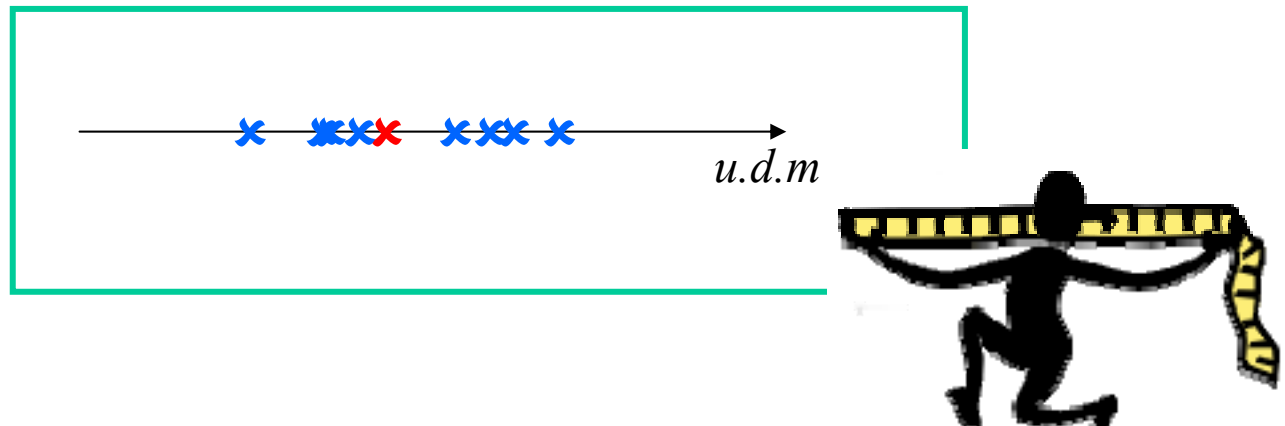
Introduzione

- Quando si effettua una misura (di qualunque cosa) non si potrà mai ottenere il valore vero del misurando, ma solo una sua approssimazione.....
- Se una misura viene ripetuta più volte, si otterranno sempre risultati diversi, anche se molto vicini tra loro.....



Introduzione

- Tutti i valori misurati si "dispongono" come una nuvola intorno al valore "vero" che si vorrebbe ottenere;
- è chiaro che tanto più è "piccola" la dimensione della regione in cui si dispongono i valori misurati, tanto migliore è la "qualità" della misura effettuata.



Pertanto, ogni volta che si effettua una misura, si ottiene solo una stima del valore misurato, e la dispersione dei valori ottenuti con le diverse misure rappresenta la bontà della stima, i.e., l'incertezza della misura.

Cause di incertezza

I motivi per cui una misura ripetuta più volte fornisce risultati diversi sono molteplici, come molteplici sono i fattori che influenzano la misura.

Ad esempio, la temperatura, l'umidità, vibrazioni o disturbi di tipo elettrico ed elettromagnetico dell'ambiente in cui si svolge la misura, l'operatore che effettua la misura, la strumentazione e la procedura utilizzata, il campione di riferimento sono tutti fattori che **influenzano** il possibile risultato della misura.

Sorgenti di errore nello svolgimento della misura possono poi essere:

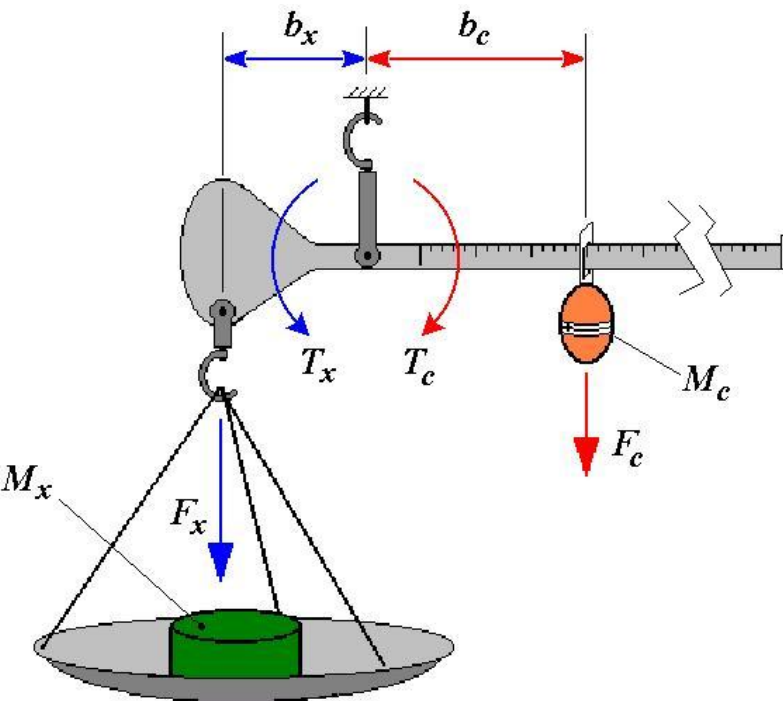
- imperfetta definizione del misurando;
- perturbazione dello stato del sistema;
- imprecisioni costruttive;
- conoscenza inadeguata degli effetti delle condizioni ambientali;
- risoluzione finita di strumenti a indicazione discreta;
- errore di lettura negli strumenti con indicazione analogica;
- variazioni del misurando in ripetute osservazioni effettuate in condizioni apparentemente identiche;
- imperfetta correzione di errori sistematici legati al metodo di misura usato;
-

Cause di incertezza

I diversi fattori che intervengono nel processo di misura possono essere catalogati in diversi gruppi a seconda di come influenzano una misura.

Ad esempio (preso dal corso di Misure elettroniche - Univ. Ancona

<http://www.mkسا.deit.univpm.it/metro/did/mgf/incertezza.htm>): la stadera.



La stadera stima il valore di una massa incognita M_x attraverso l'uso di una massa campione M_c (chiamata "romano") sfruttando l'equilibrio dei due momenti T_x e T_c che ne provocano la rotazione attorno all'asse di sospensione.

La misurazione viene effettuata ponendo la massa incognita sul piatto porta oggetti della stadera e spostando il punto di applicazione del romano fino a quando la stadera non si trova in equilibrio rispetto all'asse di sospensione.

Indicando il valore dell'accelerazione di gravità con g si ha:

$$T_x = b_x F_x = b_x M_x g$$

$$T_c = b_c F_c = b_c M_c g$$

$$T_x = T_c \Rightarrow M_x = \frac{b_c}{b_x} M_c$$

Contributi all'incertezza di misura e interventi per ridurla

Contributo:

Caratteristiche sistematiche a lungo termine

- differenza fra il valore effettivo della massa campione ed il suo valore nominale (dipende dalla precisione costruttiva o da eventi accidentali quali abrasioni dovuti ad incuria, ecc.);
- differenza fra il valore effettivo del rapporto fra le lunghezze dei due bracci b_c e b_x ed il suo valore nominale (dipende dalla precisione costruttiva)

Intervento:

Caratteristiche sistematiche a lungo termine:

- le cause di incertezza che presentano una sistematicità a lungo termine possono essere combattute mediante la "taratura" dello strumento. Per tarare uno strumento si deve misurare con questo un campione oppure si deve confrontare la misura dello strumento sotto taratura con quella di uno strumento di maggiore qualità: dal confronto del valore della misura ottenuta con il valore del campione oppure con il valore fornito dallo strumento di riferimento si può ottenere un coefficiente numerico "di taratura" mediante il quale correggere le misurazioni che verranno poi effettuate con lo strumento così tarato.

Contributi all'incertezza di misura e interventi per ridurla

Contributo:

Caratteristiche sistematiche a breve termine

- una massa di materiale estraneo che si è fissata al piatto porta-oggetti per effetto di pesate fatte in precedenza può essere ritenuta una caratteristica sistematica a breve termine in quanto, periodicamente, il piatto viene "pulito";

Intervento:

Caratteristiche sistematiche a breve termine:

- anche nel caso di sistematicità a breve termine si potrebbe pensare di fare ricorso alla taratura, ma la breve durata della sistematicità imporrebbe di ripetere la taratura ad intervalli di durata assai limitata e ciò rende di fatto improponibile tale modo di agire. Non vi sono interventi di correzione praticamente utilizzabili pertanto l'unico accorgimento a cui si può ricorrere resta quello di curare l'esecuzione della misurazione evitando, per quanto possibile, che tali cause possano assumere intensità evidente.

Contributi all'incertezza di misura e interventi per ridurla

Contributo:

Caratteristiche sistematiche dovute alla perturbazione del sistema

- la massa del foglio di carta eventualmente usato si aggiunge a quella incognita alterando l'oggetto della pesata per una quantità che può essere ritenuta costante in tutte le pesate che si eseguono in una medesima condizione e che può essere determinata;

Intervento:

Caratteristiche sistematiche dovute alla perturbazione del sistema

- in questo caso si può agire individuando il motivo della perturbazione al fine di correggere il suo effetto: fin dai primi anni di scuola si insegna, per esempio, come ottenere il "peso netto" da quello "lordo"! Da notare che in metrologia la operazione di **taratura** si riferisce a campioni e strumenti ed indica una attività diversa da quella che porta ad individuare il peso netto mediante la sottrazione della **tara** dal peso lordo.

Contributi all'incertezza di misura

Contributo:

Caratteristiche aleatorie

- l'imprecisione nel posizionamento della massa campione è una caratteristica aleatoria in quanto, riportando la massa in corrispondenza di una data tacca non è plausibile pensare che l'operatore riposizioni il romano esattamente nello stesso punto
- l'effetto degli attriti nella sospensione è una caratteristica aleatoria in quanto non è possibile conoscere né il verso di tale azione (contro T_x o contro T_c) né il suo valore
- l'effetto di masse estranee che dovessero aggiungersi alla massa incognita in modo accidentale, (e.g. moscerini che potrebbero posarsi sulla massa incognita), sono causa di incertezze accidentali ancorché non a media nulla.

Gli errori dovuti ad effetti casuali devono avere media statistica nulla. Se la media statistica degli errori dà un valore diverso da zero si è in presenza di un errore sistematico. Gli errori sistematici possono in genere essere individuati e corretti.

Intervento:

Caratteristiche aleatorie

- nel caso di caratteristiche aleatorie a media nulla si può ricorrere ad una ripetizione della misurazione con successiva media: effettuando un congruo numero di misurazioni (idealmente il numero dovrebbe essere infinito) la media ottenuta dovrebbe risultare esente dagli effetti delle cause di disturbo.

Riassumendo....

Si parte dall'osservazione che se si effettua un numero infinito di misure in condizioni di ripetibilità si ottiene un numero infinito di risultati diversi a causa degli effetti casuali associati alle variazioni temporali e spaziali delle quantità di influenza.

- Alcuni effetti possono essere eliminati o quanto meno ridotti seguendo una corretta procedura di misura.
- Tuttavia, pur diminuendo le cause di incertezza, questa non potrà mai essere completamente eliminata da una misura.
- E' allora necessario corredare ogni misura con il suo indice di "bontà". Ovvero con la sua incertezza.
- Ci sono diversi modi di esprimere l'incertezza di una misura, legati al tipo di misura.
- Esiste quindi una teoria dell'incertezza

Condizioni di riproducibilità

- Esprime l'accordo tra misure effettuate sulla stessa quantità con diversi metodi e condizioni di misura (diversi strumenti, diverso operatore, luogo, tempo, etc)

Se non ci fossero non si potrebbe fare una teoria della misura

Condizioni di ripetibilità

Servono per poter trovare due risultati prossimi tra loro in due diverse esecuzioni della stessa misura:

- Stesso procedimento di misura;
- stesso operatore;
- stesso strumento di misura usato nelle stesse condizioni;
- stesso luogo;
- ripetizioni effettuate entro brevi intervalli di tempo

La misura è definita quando

Bisogna fornire almeno tre informazioni:

- **Il valore** che quantifica il misurando - è il risultato del confronto tra il misurando e una grandezza di riferimento.
- **L'accuratezza della misura** - è il livello di fiducia che si attribuisce alla misura ed è, quindi, indicativa del pregio (e anche del costo) della strumentazione di misura e anche della metodologia adottata.
- **L'unità di misura** - che deve essere internazionalmente riconosciuta ai fini di una migliore comunicazione del risultato.



Definizione di incertezza

In conclusione,

- sono noti solo i risultati delle misure;
- occorre un parametro unico per esprimere l'incertezza, valutabile in tutte le situazioni (deterministiche e statistiche);
- questo parametro deve potersi esprimere in funzione di tutte le componenti che causano l'incertezza, deve potersi adoperare per esprimere l'incertezza su un risultato che utilizzi il dato a cui è collegato, e per fare confronti

L'incertezza di una misura è un parametro, associato con il risultato della misura, che caratterizza la dispersione dei valori che potrebbero essere ragionevolmente attribuiti al misurando.

Metodi di valutazione dell'incertezza

L'incertezza del risultato di una misura consiste di diverse componenti che possono essere raggruppate in due categorie a seconda del metodo usato per stimare il loro valore numerico:

INCERTEZZA DI TIPO A

- il metodo di valutazione parte dall'analisi statistica di una serie di osservazioni;

INCERTEZZA DI TIPO B

- il metodo di valutazione si basa su supposizioni teoriche della statistica che caratterizza un processo di misura

Metodi di tipo A (metodi statistici)

Se si ripete la misura nelle stesse condizioni per molte volte e si traccia l'istogramma si vede che questo tende ad una gaussiana (Teorema del limite centrale):

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - x_m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

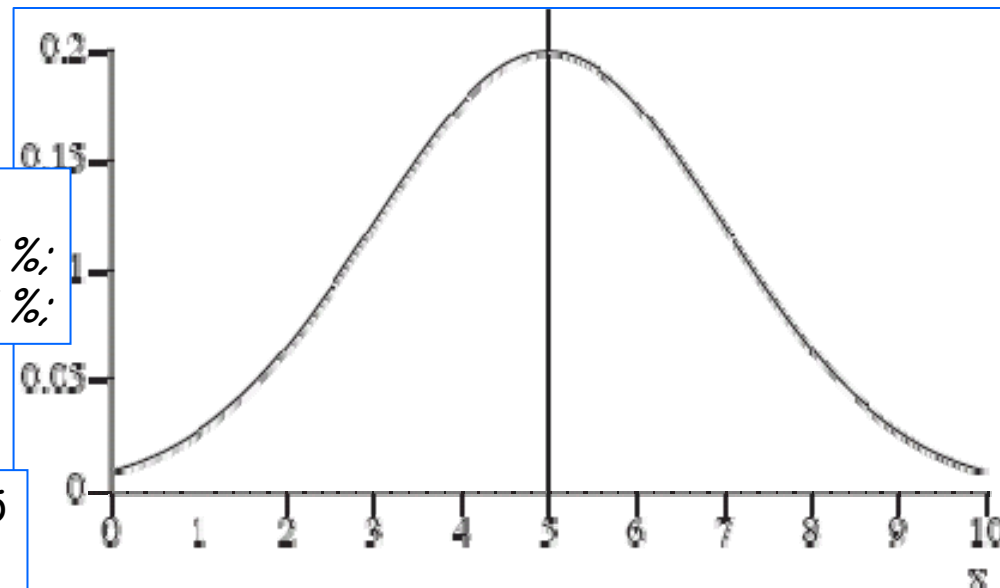
con x_m valore medio e σ^2 varianza ($\sigma = \sqrt{\sigma^2}$: deviazione standard). La deviazione standard rappresenta la distanza tra il valor medio ed i punti di flesso. Inoltre la probabilità che un valore preso a caso tra le misurazioni effettuate cada nell'intervallo $x_m \pm \sigma$ è del 68.4%.

Analogamente, all'intervallo

$x_m \pm 2\sigma$ corrisponde una probabilità di 95.7 %;

$x_m \pm 3\sigma$ corrisponde una probabilità di 99.7 %;

Valor medio = 5
Varianza = 2



Metodi di tipo A (metodi statistici)

Effettuando un numero n , finito, di misure sulla grandezza X , si otterranno n valori:

$$X_i \text{ con } i=1..n$$

se si potessero fare infinite osservazioni, una stima del valore della grandezza X sarebbe il valor medio x_m .

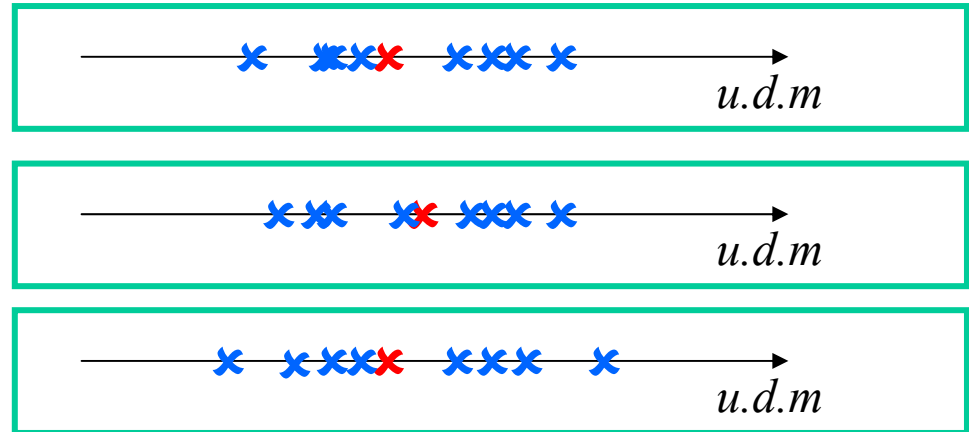
La teoria statistica dimostra che la stima migliore del valor medio (x_m) è data dalla media sperimentale $\bar{X}$ ottenuta sulle n osservazioni indipendenti x_i come:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Metodi di tipo A (metodi statistici)

Se prendessimo un altro gruppo di n osservazioni probabilmente otterremmo un diverso valore di $\bar{X}$.

E' la dispersione di questi valori medi sperimentali il parametro di incertezza che si vuole determinare.



Questa dispersione è rappresentata dalla varianza della distribuzione dei valori medi, valutabile a partire dalla varianza della distribuzione delle singole misure $\sigma^2(x)$, secondo la:

$$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2(x)}{n}$$

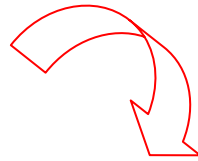
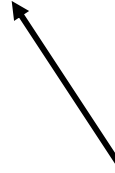
Tale varianza però, si può ottenere solo a seguito di infinite misurazioni e quindi avendo un numero infinito di valori misurati...

Metodi di tipo A (metodi statistici)

Una stima della varianza è data dalla varianza sperimentale definita come:

$$s^2(x_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

Varianza della singola misura



$$s(x_i) = \sqrt{s^2(x_i)}$$

Scarto tipo sperimentale o
Deviazione sperimentale standard



Metodi di tipo A (metodi statistici)

Operando sulla varianza sperimentale in modo analogo alla relazione per ottenere la varianza della media aritmetica di n valori partendo dalla varianza della loro distribuzione, si ha

$$s^2(\bar{X}) = \frac{s^2(x_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

La sua radice è la deviazione sperimentale standard della media e prende il nome di incertezza $U(x)$ associata al risultato della misura $\bar{X}$

Il numero n delle osservazioni deve essere abbastanza grande da assicurare che $\bar{X}$ e $s^2(\bar{X})$ siano una buona stima di x_m e di $\sigma^2(\bar{X})$

Incertezza con cui conosco l'incertezza...

numero osservazioni	$\sigma[s(\bar{x})]/\sigma(\bar{y})$ in percentuale
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

Metodi di tipo B (.. altro..)

- In questa classe rientrano tutte le incertezze che non possono essere caratterizzate tramite la deviazione standard ricavata da misure ripetute (come per quella di tipo A).
- In questo caso, l'incertezza viene valutata attraverso distribuzioni di probabilità stabilite sulla base di un'analisi teorica del processo, o di conoscenze sperimentali delle caratteristiche e del comportamento della strumentazione, o da specifiche tecniche di fabbrica, specifiche di calibrazione, ipotesi conservative.
- Quindi nelle valutazioni di tipo B in primo luogo si fa una stima dei limiti delle variazioni sulla misura causate da una sorgente d'incertezza, ovvero si valuta lo scarto massimo. In seguito si assume una certa distribuzione di probabilità tra questi limiti; infine, si calcola una deviazione standard equivalente che rappresenta l'incertezza standard.

Metodi di tipo B (.. altro..) - statistica

- Si definisce distribuzione della probabilità della misura, quella funzione che rappresenta la probabilità di ottenere un certo valore x come risultato di una misura, funzione del valore x stesso.
- Data un'assegnata distribuzione $f(x)$, si definisce media della distribuzione il valore

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

- Si definisce varianza della distribuzione, che definisce quanto la distribuzione "è larga" intorno al valor medio,

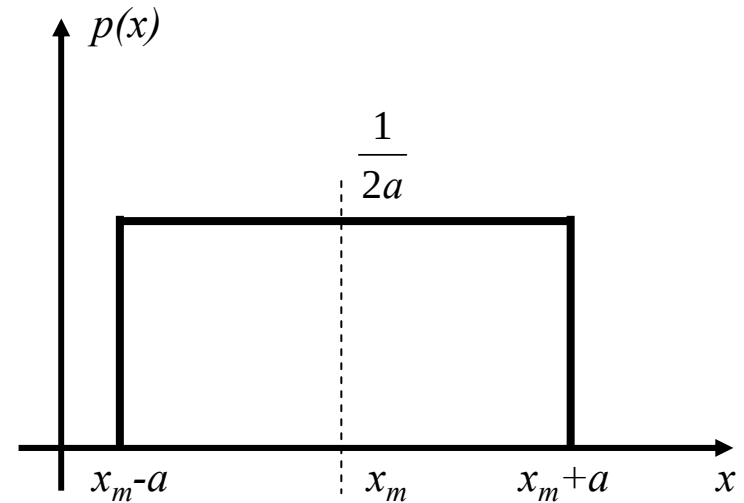
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$$

- Le distribuzioni di probabilità più correntemente utilizzate sono quattro: rettangolare (o uniforme), normale (o gaussiana), triangolare, distribuzione a U.

Distribuzione rettangolare

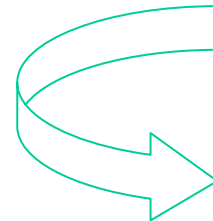
Quando si può assumere che tutti i possibili valori di misura siano equiprobabili, allora la distribuzione di probabilità è di tipo rettangolare.

Indicando con a lo scarto massimo, l'incertezza di misura diventa:



$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x - x_m)^2 dx = \int_{x_m - a}^{x_m + a} \frac{1}{2a} (x - x_m)^2 dx = \frac{1}{2a} \left[\frac{(x - x_m)^3}{3} \right]_{x_m - a}^{x_m + a} = \frac{a^2}{3}$$

varianza di una distribuzione

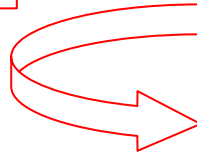


$$U = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

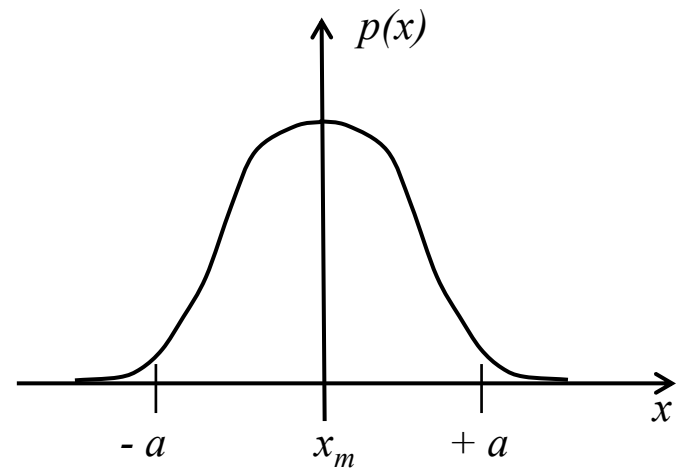
Distribuzione normale

- La distribuzione normale o gaussiana si usa quando la probabilità che il valore misurato sia prossimo al valor medio è maggiore di quella che sia lontano da esso.
- Mentre con la distribuzione rettangolare il valore misurato cade sicuramente entro i limiti, in questo caso si avrà sempre la possibilità che la misura cada nelle code, e non sia compresa nell'incertezza.
- Allora, usando una probabilità del 95.7% che il valore misurato cada nell'intervallo considerato,

$$a = 2\sigma$$



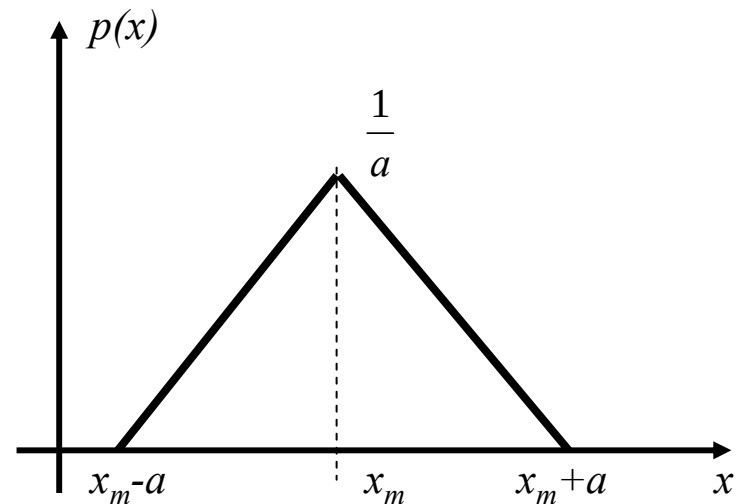
$$U = \sigma = \frac{a}{2}$$



Distribuzione triangolare

- Se il valore misurato è più probabile che cada in prossimità del valor medio che verso gli estremi dell'intervallo, e se è ipotizzabile una variazione lineare tra il valor medio e i limiti, allora si usa una distribuzione di tipo triangolare

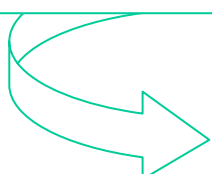
$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(x - x_m) + \frac{1}{a} & x \in [x_m - a; x_m] \\ -\frac{1}{a^2}(x - x_m) + \frac{1}{a} & x \in [x_m; x_m + a] \end{cases}$$



- In questo caso si trova:

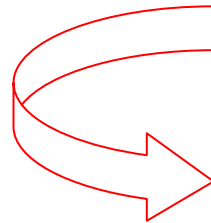
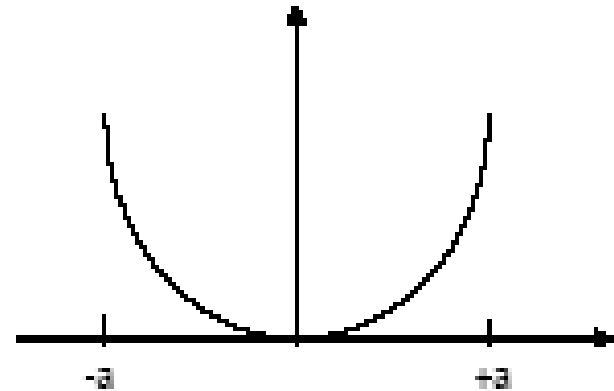
$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x - x_m)^2 dx =$$

$$\sigma_x^2 = \int_{x_m - a}^{x_m} \left[\frac{1}{a^2}(x - x_m)^3 + \frac{1}{a}(x - x_m)^2 \right] dx + \int_{x_m}^{x_m + a} \left[-\frac{1}{a^2}(x - x_m)^3 + \frac{1}{a}(x - x_m)^2 \right] dx = \dots = \frac{a^2}{6}$$


$$U = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Distribuzione ad U

- Nel caso in cui il valore misurato è più probabile sia vicino agli estremi dell'intervallo di variazione, piuttosto che vicino al valor medio, allora si usa la distribuzione ad U.
- In questo caso si ha:



$$U = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Misure indirette

- Nel caso in cui la grandezza da misurare non sia rilevabile direttamente con uno strumento di misura, ma sia ottenibile partendo dalla misura di altre grandezze a cui è legata tramite un funzionale,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- allora la sua incertezza dovrà essere derivata dalla incertezza sulle misure delle singole variabili x_i indipendenti.
- Se $\bar{x}_i$ rappresenta il risultato della misura sulla variabile i-esima e $u_i(x)$ la corrispondente incertezza, allora

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

- rappresenta il risultato della misura indiretta e la sua incertezza $u_c(y)$ (incertezza standard combinata) può essere ricavata dalle singole incertezze e dal legame funzionale tra le singole variabili e la y .

Incertezza standard combinata

- Scrivendo i risultati delle singole misure come valori all'interno di un intervallo ("scarto"), e sviluppando in serie di Taylor

$$x_i = \bar{x}_i \pm \delta x_i$$

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$


$$\bar{y} + \delta y = f(\bar{x}_1 + \delta x_1, \bar{x}_2 + \delta x_2, \dots, \bar{x}_n + \delta x_n) =$$

$$= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_2, \dots, x_n \text{ costanti}} \delta x_1 +$$
$$+ \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_1, \dots, x_n \text{ costanti}} \delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x_2, \dots, x_{n-1} \text{ costanti}} \delta x_n$$



$$\delta y = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \delta x_n$$

Incertezza standard combinata

- Per passare dagli scarti alle incertezze, nell'ipotesi che le grandezze siano scorrelate, e gli scarti siano interpretati come semiampiezza della fascia di incertezza ($\pm a$), (quindi vanno corretti in base alla distribuzione ipotizzata per avere le incertezze)
- l'incertezza composta è data da:

$$u(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 u^2(x_n)}$$

<i>Funzione</i>	<i>Incertezza Composta Assoluta</i>
$y = A + B$	$u(y) = \sqrt{u(A)^2 + u(B)^2}$
$y = A - B$	$u(y) = \sqrt{u(A)^2 + u(B)^2}$
$y = k \cdot A$	$u(y) = k \cdot u(A)$
$y = A \cdot B$	$u(y) = \sqrt{B^2 u(A)^2 + A^2 u(B)^2}$
$y = A^n$	$u(y) = n \cdot A^{n-1} \cdot u(A)$
$y = A \cdot B \cdot C$	$u(y) = \sqrt{(BC)^2 u(A)^2 + (AC)^2 u(B)^2 + (AB)^2 u(C)^2}$

Tab. 1.5 Espressioni dell'incertezza tipo composta assoluta A. Bossi e P. Malcovati, Misure Elettriche

Esempio: caso lineare

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

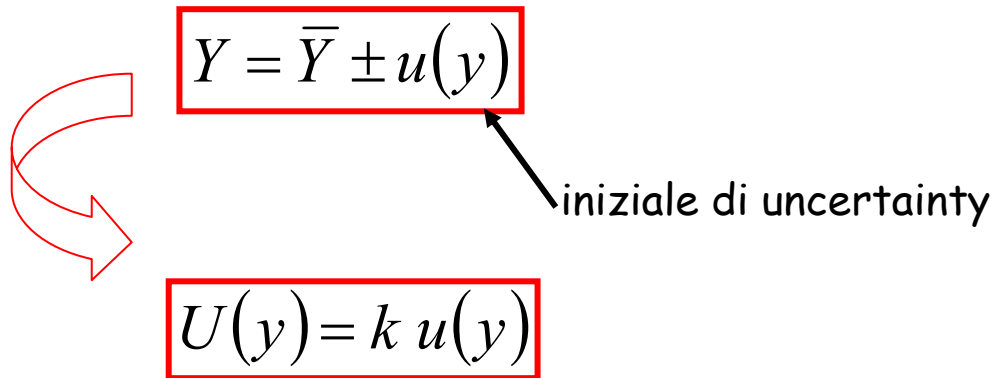


$$\bar{y} = c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \dots + c_n \bar{x}_n$$

$$u(y) = \sqrt{c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2) + \dots + c_n^2 u^2(x_n)}$$

Incertezza estesa

- Poiché sono coinvolte più grandezze, la distribuzione tende a quella gaussiana e la $\sigma(y)$ assume il significato di incertezza standard $u(y)$ con una fiducia del 68.4%. Se si vogliono avere probabilità più elevate bisogna moltiplicare $u(y)$ per un fattore di copertura.
- L'incertezza estesa definisce un intervallo intorno al risultato di una misura entro cui ci si aspetta che entri una fissata percentuale di tutti i valori di misura che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando.
- Si ottiene moltiplicando l'incertezza composta $u(y)$ per un opportuno fattore di copertura k .



The diagram illustrates the calculation of extended uncertainty. It features two equations, each enclosed in a red rectangular box. The top equation is $Y = \bar{Y} \pm u(y)$. The bottom equation is $U(y) = k u(y)$. A black arrow points from the text "iniziale di uncertainty" to the $u(y)$ term in the top equation. A red curved arrow points from the top equation down to the bottom equation, indicating the substitution of the initial uncertainty into the extended uncertainty formula.

$$Y = \bar{Y} \pm u(y)$$

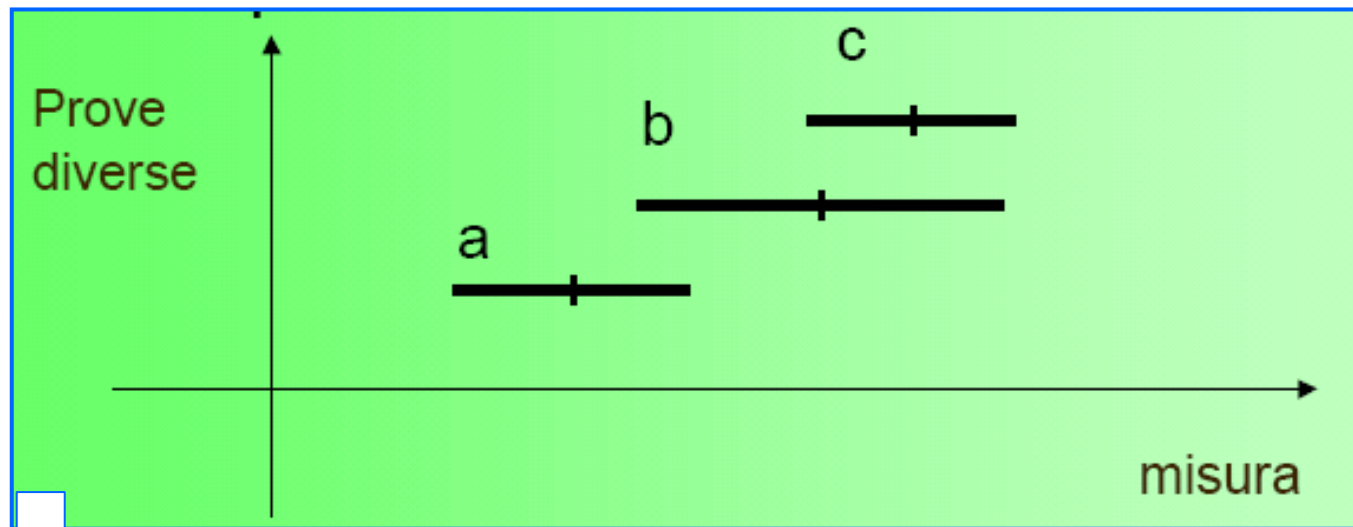
iniziale di uncertainty

$$U(y) = k u(y)$$

k = **fattore di copertura**, dipende dalla distribuzione di probabilità ipotizzata.

Compatibilità delle misure

- Quando si confrontano due misure si deve tenere conto dell'incertezza.
- Si parla allora di **compatibilità delle misure**
- le **misure sono compatibili** quando le fasce di valore assegnate in diverse occasioni come misura della stessa quantità, nello stesso stato, hanno intersezione non nulla



- a e b sono compatibili
- b e c sono compatibili
- a e c NON sono compatibili

La compatibilità **NON** gode della **proprietà transitiva**

- se a compatibile con b e b è compatibile c
- non necessariamente è a compatibile con c

Sono **mutuamente compatibili** le misure che hanno almeno un elemento in comune fra tutte le fasce di valore

Scrittura dell'incertezza

- In generale il risultato della misura è dato dalla stima $\bar{X}$ gravata dall'incertezza U

L'incertezza viene derivata dallo "scarto tipo", ovvero dalla deviazione standard, il quale può essere espresso in forma assoluta

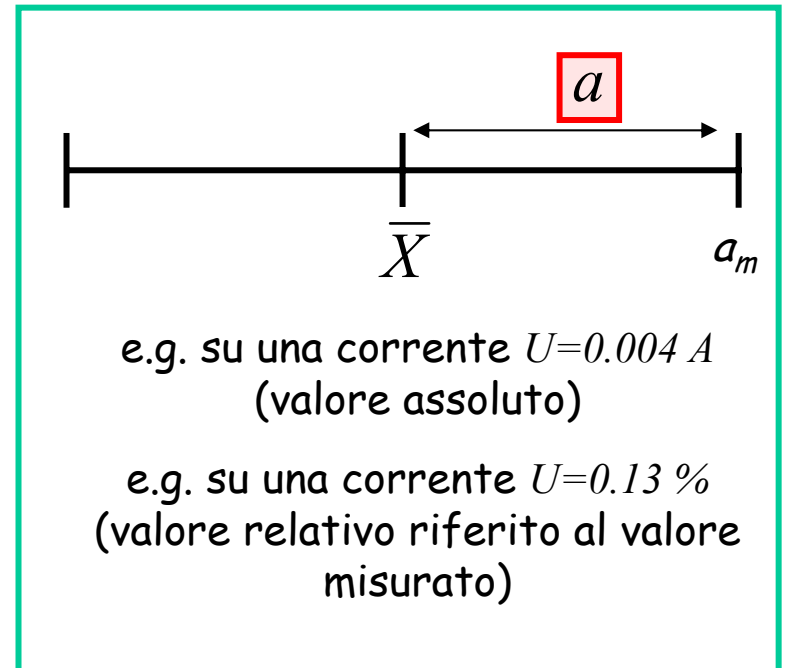
$$X = \bar{X} \pm a$$

ha le stesse unità di misura del misurando

o anche relativa

$$\dot{a} = \frac{a}{\bar{X}} \times 100$$

è espressa in percentuale

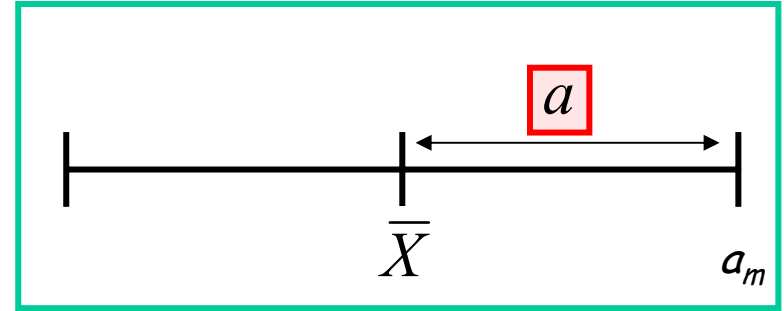


Legame tra lo scarto espresso dB - %

Se a_{dB} è lo scarto espresso in dB e $a_{\%}$ è lo scarto espresso in percentuale, il loro legame è:

$$a_m = \bar{X} + a$$

$$a_{\%} = \frac{a}{\bar{X}} \cdot 100$$



$$\begin{aligned} a_{dB} &= \left. \frac{a_m}{\bar{X}} \right|_{dB} = 20 \log_{10} \left[\frac{\bar{X} + a}{\bar{X}} \right] = 20 \log_{10} \left[1 + \frac{a}{\bar{X}} \right] = \\ &= 20 \log_{10} \left[1 + \frac{a}{\bar{X}} \cdot \frac{100}{100} \right] = 20 \log_{10} \left[1 + \frac{a_{\%}}{100} \right] \end{aligned}$$

$$a_{dB} = 20 \log_{10} \left(1 + \frac{a_{\%}}{100} \right)$$

$$10^{\frac{a_{dB}}{20}} = 1 + \frac{a_{\%}}{100} \Rightarrow a_{\%} = 100 \times \left(10^{\frac{a_{dB}}{20}} - 1 \right)$$

Esempio - sonda per la misura di campo

- Per la sonda ET3DV5R della ditta Schmid & Partner il data-sheet fornisce per gli scarti relativi in dB i seguenti valori con le relative distribuzioni:

- I: deviazione dall'isotropia ± 1.5 dB rettangolare
- L: deviazione dalla linearità $< \pm 0.2$ dB rettangolare
- C: incertezza residua della calibrazione ± 6.6 % normale

- Quindi si avranno i seguenti scarti percentuali:

$$- a(I) = 100 \cdot \left(10^{\frac{1.5}{20}} - 1 \right) = 18.85\% \quad \Rightarrow \quad u(I) = \frac{a(I)}{\sqrt{3}} = 10.88\%$$

$$- a(L) = 100 \cdot \left(10^{\frac{0.2}{20}} - 1 \right) = 2.33\% \quad \Rightarrow \quad u(L) = \frac{a(L)}{\sqrt{3}} = 1.34\%$$

$$- a(C) = 6.6\% \quad \Rightarrow \quad u(C) = \frac{a(C)}{2} = 3.3\%$$

avendo diviso per i fattori di normalizzazione delle corrispondenti distribuzioni

- L'incertezza totale sarà:

$$u(E) = \sqrt{u^2(I) + u^2(L) + u^2(C)} = 11.5\%$$

- e moltiplicata per un fattore di copertura 2: **$U = 2u(E) = 23\%$**