Esercitazione 1

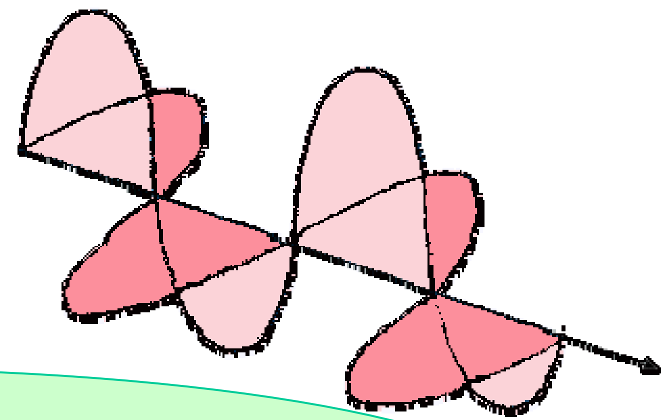
Ripasso nozioni di base di campi elettromagnetici

onde piane.....

radiazione.....

Definizioni

Si definisce **ONDA** la variazione temporale di un campo



Onda elettromagnetica

Si ottiene come soluzione delle equazioni di Maxwell con

- equazioni costitutive dei mezzi
- condizioni al contorno

Ripasso: Equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

nel dominio del tempo

Trasformata di Fourier

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r},\omega) = -j\omega \underline{B}(\underline{r},\omega)$$

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r},\omega) = \underline{J}(\underline{r},\omega) + j\omega \underline{D}(\underline{r},\omega)$$

nel dominio della frequenza

Ripasso: Equazioni costitutive dei mezzi

Caratteristiche dei mezzi:

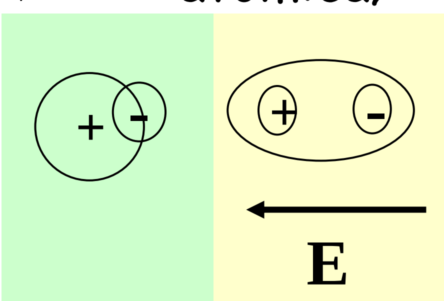
- Linearità, isotropia, stazionarietà, omogeneità, dispersione temporale e spaziale, dissipatività

Dielettrici

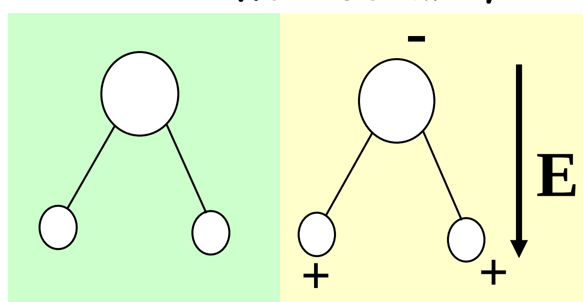
Conduttori

Polarizzazione dei dielettrici ⇒ ε, σ

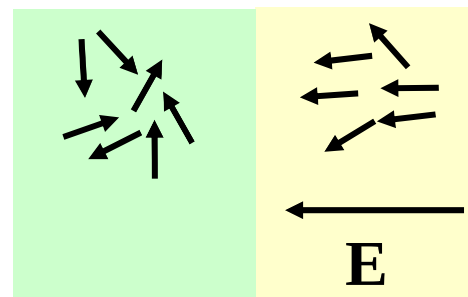
atomica;



molecolare;



orientamento.



$$\underline{D}(\underline{r},\omega)=\varepsilon_0\underline{E}(\underline{r},\omega)+\underline{P}(\underline{r},\omega)=....=\varepsilon_0\varepsilon_r\underline{E}(\underline{r},\omega)$$
$$\underline{B}(\underline{r},\omega)=\mu_0\underline{H}(\underline{r},\omega)+\underline{M}(\underline{r},\omega)=....=\mu_0\mu_r\underline{H}(\underline{r},\omega)$$

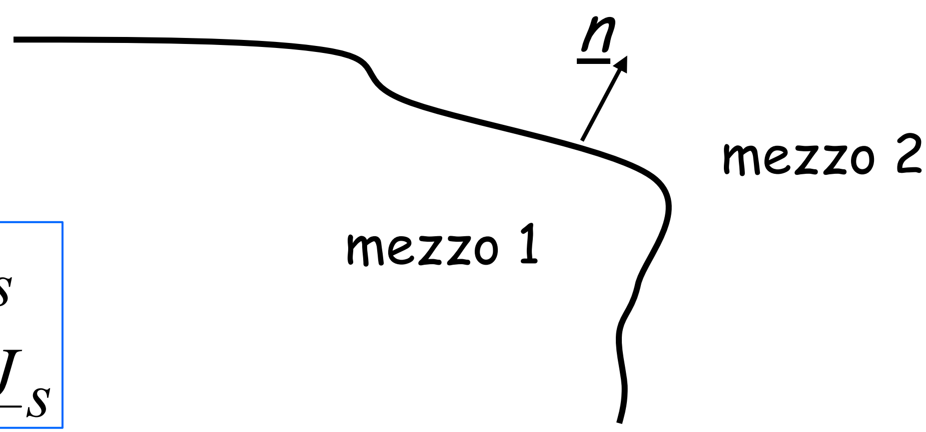
$$\underline{J}(\underline{r},\omega)=\sigma\underline{E}(\underline{r},\omega)$$

Ripasso: Condizioni al contorno

Interfaccia

$$\underline{n}\cdot\left(\underline{D}_2-\underline{D}_1\right)=\rho_s$$

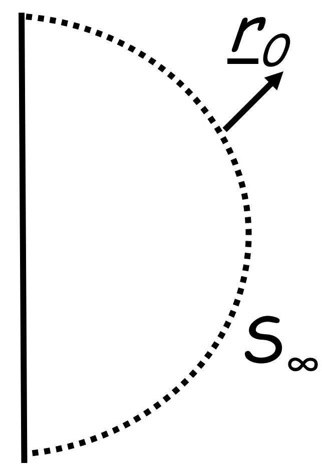
$$\underline{n}\times\left(\underline{H}_2-\underline{H}_1\right)=\underline{J}_s$$



All' ∞

$$\lim_{r\to\infty} r^{\upsilon}\,\underline{E}=0 \qquad \forall\,\upsilon<1$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\underline{r}_0\times\underline{E}-\eta_\infty\underline{H}\right)=0$$



Sono le condizioni di radiazione: poiché all'infinito non vi sono cariche, il campo deve tendere a 0 con dipendenza almeno 1/r; inoltre il campo elettrico ed il campo magnetico devono tendere ad una forma 'tipo' onda piana.

Onda elettromagnetica

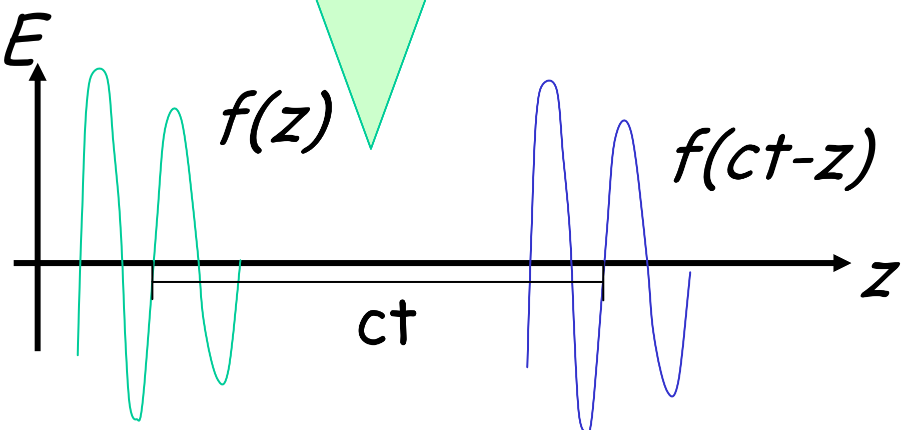
si definisce
onda elettromagnetica
una soluzione delle equazioni di Maxwell

nel dominio del tempo.....

$$E(z,t) = f(ct - z) + g(ct + z)$$

nel dominio della frequenza.....

$$E(\underline{r},\omega) = m(\underline{r},\omega)e^{-j\Phi(\underline{r},\omega)}$$



Espressione onda elettromagnetica

L'onda e.m., **nel dominio della frequenza**,
sarà *una grandezza complessa, caratterizzata da modulo e fase*

$$a(\underline{r},\omega) = m(\underline{r},\omega)e^{-j\Phi(\underline{r},\omega)}$$

- Tornando nel tempo (fasori):

$$a(\underline{r},t) = \mathrm{Re}\left[a(\underline{r},\omega)e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[m(\underline{r},\omega)e^{-j\Phi(\underline{r},\omega)}e^{j\omega t}\right]$$

$$a(\underline{r},t) = m(\underline{r},\omega)\cos(\omega t - \Phi(\underline{r},\omega))$$

- La fase dell'onda è data da:

$$\Psi = \omega t - \Phi(\underline{r},\omega)$$

Velocità di fase

La velocità di fase è la velocità che dovrebbe avere un ipotetico osservatore per non osservare variazioni di fase nell'onda:

$$\boxed{d\Psi = d\left(\omega t - \Phi\left(\underline{r},\omega\right)\right) = 0}$$

Lungo una generica direzione r:

$$\omega dt - \frac{\partial \Phi\left(\underline{r},\omega\right)}{\partial r} dr = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_f = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{\frac{\partial \Phi\left(\underline{r},\omega\right)}{\partial r}}}$$

Propagazione delle onde

$$a(\underline{r},\omega) = m(\underline{r},\omega)e^{-j\Phi(\underline{r},\omega)}$$

Se la funzione iconale è costante nello spazio

l'onda si dice ***stazionaria***;

altrimenti si ha un'onda ***progressiva***

Superfici equifase, equiampiezza

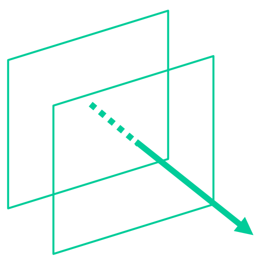
Si definiscono ***superfici equifase*** quelle superfici in cui risulta $\Phi(\underline{r})$ costante

$$\boxed{a(\underline{r},\omega) = m(\underline{r},\omega)e^{-j\Phi(\underline{r},\omega)}}$$

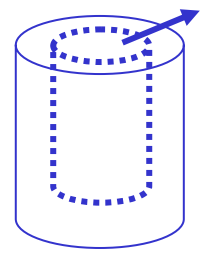
Si definiscono ***superfici equiampiezza*** quelle superfici in cui risulta costante il modulo dell'onda

Onda uniforme

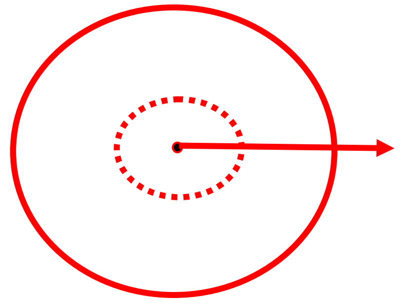
L'onda *prende il nome* dalla forma delle superfici equifase



piane



cilindriche



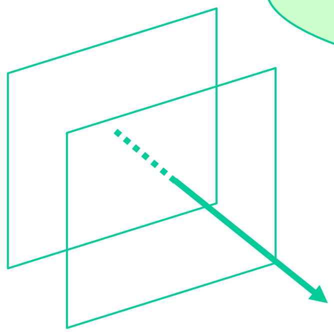
sferiche

Un'onda elettromagnetica si definisce ***uniforme*** quando
le superfici equifase ed equiampiezza coincidono

Onde piane

Un'onda elettromagnetica si definisce ***piana*** quando il luogo dei punti in cui la funzione iconale è costante è un piano.

i.e., ***superfici equifase = piani***



Le onde piane si ottengono come soluzione particolare delle equazioni di Maxwell, sotto particolari condizioni semplificative.

Onde piane

Le onde piane rappresentano un'astrazione.

Tuttavia, sono particolarmente importanti

in quanto:

- molti fenomeni propagativi possono essere schematizzati con la **propagazione** di onde piane;
- il campo lontano di un'antenna è **localmente** di tipo onda piana;
- nelle **strutture guidanti** si propagano onde piane;
- un qualunque campo elettrico (trasformabile secondo Fourier) si può esprimere come somma integrale di **infinite onde piane** di ampiezza infinitesima.

Onde piane

Si possono ottenere come soluzioni delle

1. equazioni di Maxwell omogenee (no correnti impresse);
2. nello spazio libero (no discontinuità);
3. in un mezzo lineare, isotropo, omogeneo, stazionario, eventualmente dispersivo nel tempo.

Si ottengono dall'equazione di Helmholtz omogenea

$$\boxed{\nabla^2 \underline{E}(\underline{r},\omega) + k^2 \underline{E}(\underline{r},\omega) = 0}$$

$$\boxed{k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c = \omega^2 \mu \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right)}$$

con la condizione:

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r},\omega) = 0}$$

Onde piane: caratteristiche

Hanno una forma del tipo

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r},\omega)=\underline{E}_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}}} \qquad (1)$$

$\underline{r}$ vettore posizione

$\underline{k}$, vettore di propagazione, deve soddisfare la

$$\boxed{\underline{k}\cdot\underline{k}=k^2} \longleftarrow \textit{condizione di separabilità}$$

perché la (1) rappresenti un'onda piana deve essere:

$$\boxed{\underline{k}\cdot\underline{E}_0=0} \longleftarrow \textit{definisce la polarizzazione}$$

Onde piane: caratteristiche

Dalla condizione di separabilità....

$$\underline{k}\cdot\underline{k}=k^2$$

con

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon_c=\omega^2\mu\left(\varepsilon+\frac{\sigma}{j\omega}\right)$$

$$\underline{k}=\underline{\beta}-j\underline{\alpha}$$

$$\underline{E}(\underline{r},\omega)=\underline{E}_0 e^{-\underline{\alpha}\cdot\underline{r}}e^{-j\underline{\beta}\cdot\underline{r}}$$

ampiezza + polarizzazione

fase

Superfici equifase

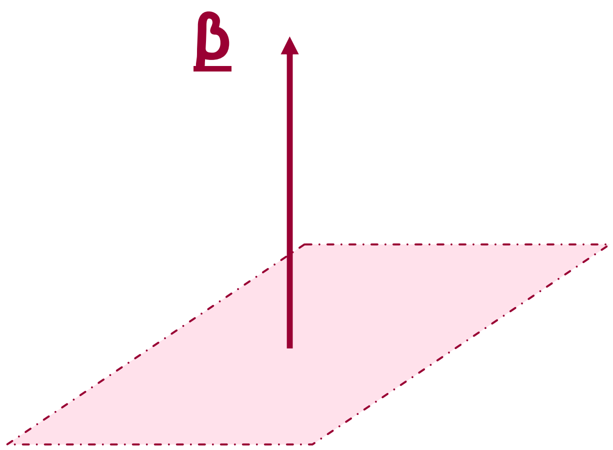
superfici equifase = **Φ(<u>r</u>) costante**

$$\underline{\beta}\cdot\underline{r} \quad \text{costante}$$

$$\underline{\beta}\cdot\underline{r}_1 = \underline{\beta}\cdot\underline{r}_2$$

$$\underline{\beta}\cdot\left(\underline{r}_1-\underline{r}_2\right) = 0$$

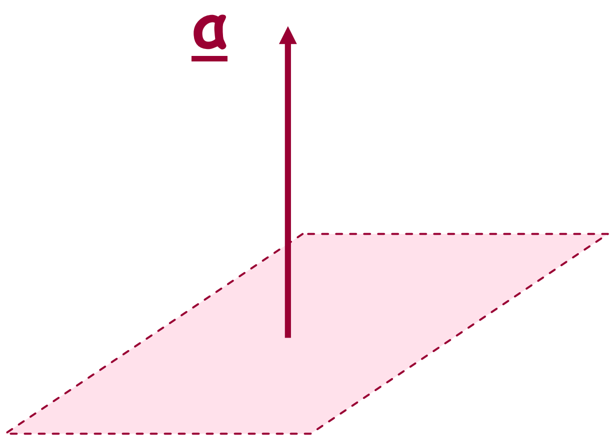
$$\overline{P_1P_2} = \left(\underline{r}_1-\underline{r}_2\right) \perp \underline{\beta}$$



Piani!

Superfici equiampiezza

superfici equiampiezza = **modulo costante**



$\underline{\alpha} \cdot \underline{r}$ costante

$\underline{\alpha} \cdot \underline{r}_1 = \underline{\alpha} \cdot \underline{r}_2$

$\underline{\alpha} \cdot \left(\underline{r}_1 - \underline{r}_2\right) = 0$

$\overline{P_1 P_2} = \left(\underline{r}_1 - \underline{r}_2\right) \quad \perp \quad \underline{\alpha}$

Piani!

Velocità di fase

Nel caso generale si era trovato:

$$\boxed{v_f = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{\dfrac{\partial \Phi(\underline{r},\omega)}{\partial r}}}$$

per l'onda piana, allora, lungo la direzione di $\underline{\beta}$:

$$\boxed{\Phi(\underline{r},\omega) = \underline{\beta} \cdot \underline{r}}$$

$$\boxed{v_f = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{\dfrac{\partial \Phi(\underline{r},\omega)}{\partial r}} = \frac{\omega}{\beta}}$$

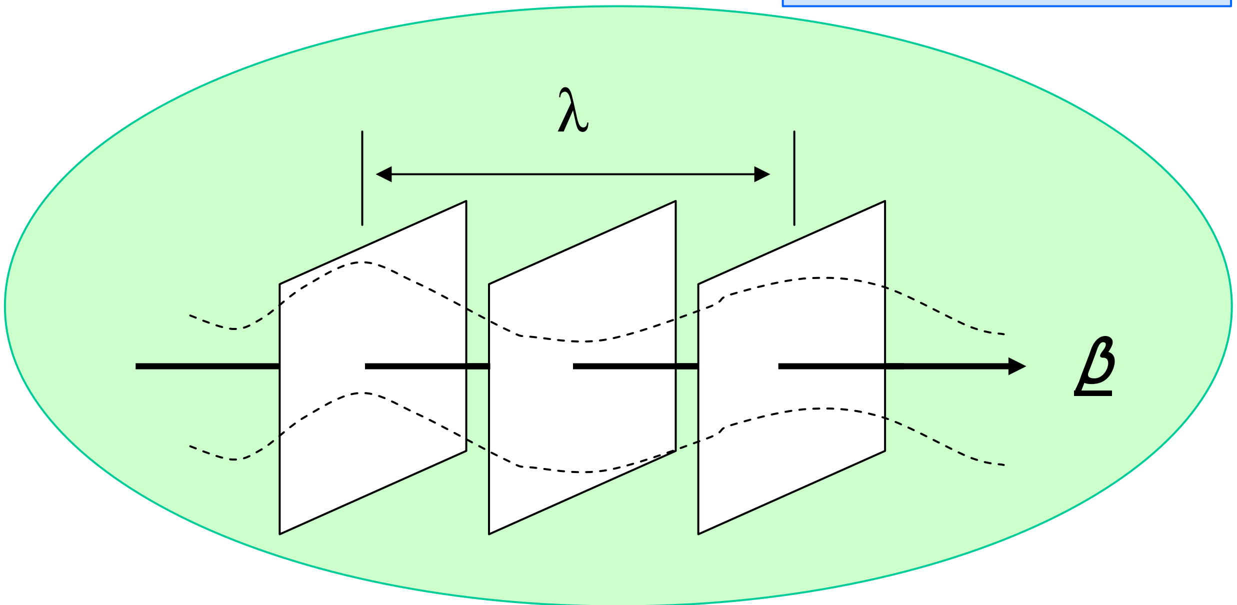
Lunghezza d'onda

Si definisce lunghezza d'onda λ la distanza tra due punti fra i quali esiste una differenza di fase pari a 2π

Lungo la direzione di $\underline{\beta}$:

$$\boxed{\beta\, r_2 - \beta\, r_1 = 2\pi}$$

$$\boxed{\lambda = r_2 - r_1 = \frac{2\pi}{\beta}}$$



Polarizzazione dell'onda

Luogo geometrico descritto dall'estremo libero del vettore

La condizione:

$$\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega) = 0$$

diventa:

$$\underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0$$

con $\underline{k} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha}$ $\quad$ $\underline{E}_0 = \underline{E}_{0R} + j\underline{E}_{0J}$

$$\Downarrow$$

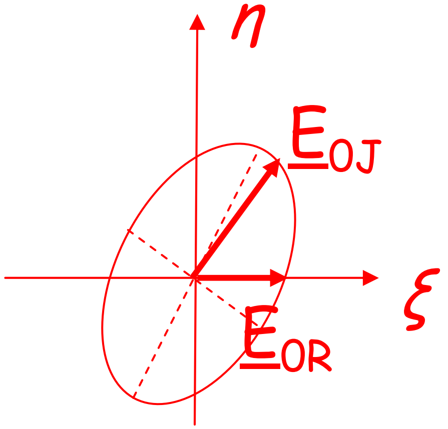
$$\begin{aligned} \underline{\beta} \cdot \underline{E}_{0R} + \underline{\alpha} \cdot \underline{E}_{0J} &= 0 \\ \underline{\beta} \cdot \underline{E}_{0J} - \underline{\alpha} \cdot \underline{E}_{0R} &= 0 \end{aligned}$$

Polarizzazione

$$\vec{E}(\underline{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\left(\underline{E}_{0R} + j\underline{E}_{0J}\right)e^{-j\underline{\beta}\cdot\underline{r}}e^{j\omega t}\right\}$$

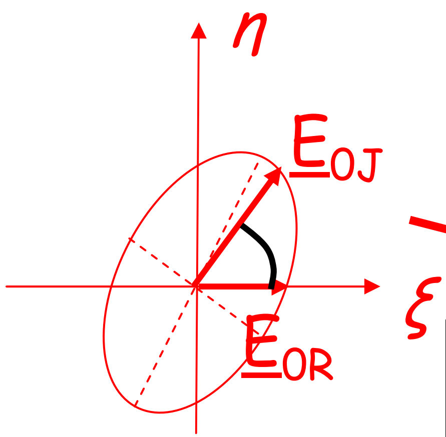
$$\vec{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_{0R}\cos\left(\omega t - \underline{\beta}\cdot\underline{r}\right) - \underline{E}_{0J}\sin\left(\omega t - \underline{\beta}\cdot\underline{r}\right)$$

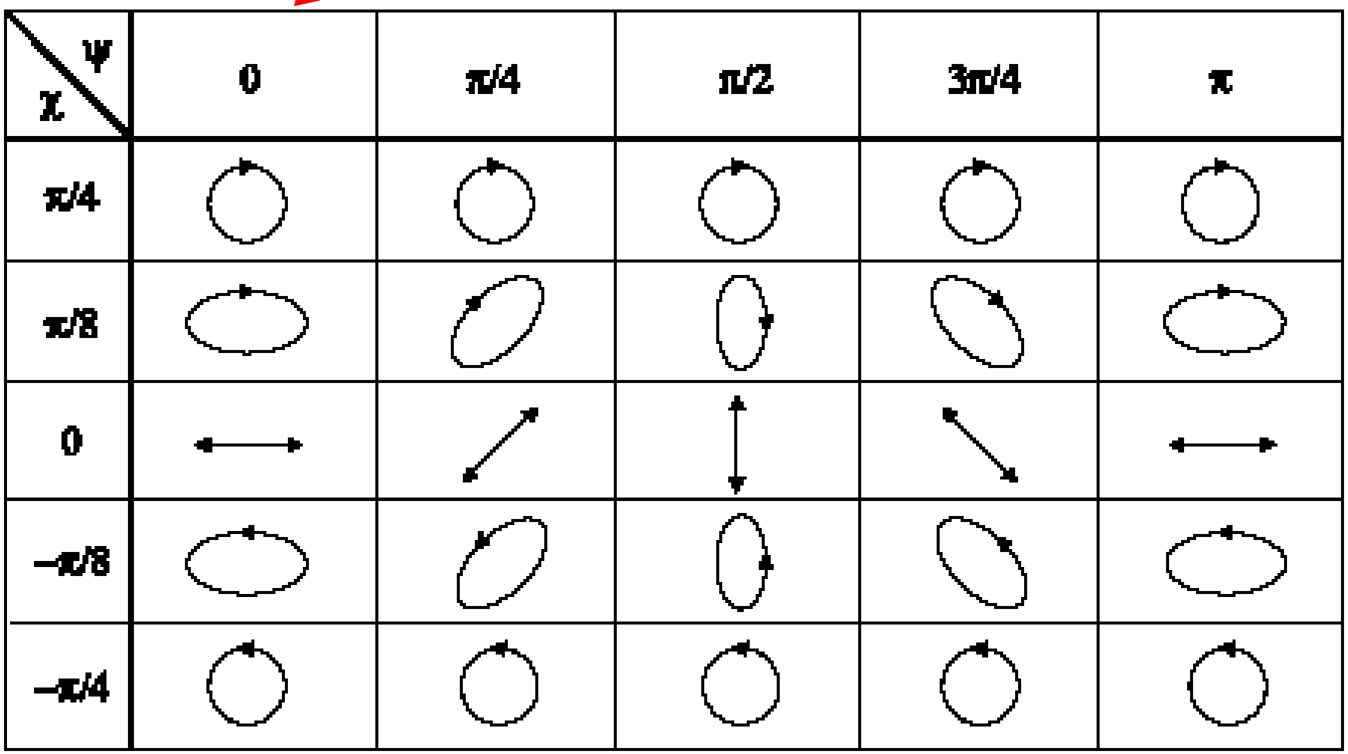
$$\vec{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_{0R}\cos(\omega t) - \underline{E}_{0J}\sin(\omega t)$$



Luogo geometrico: ellisse

Stato di polarizzazione



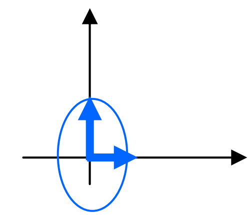


χ = arc tang(E_{0J}/E_{0R})

Polarizzazione ellittica

Un'onda piana polarizzata ellitticamente si può scomporre come somma di due onde piane polarizzate linearmente con uguale direzione di propagazione e polarizzazioni non parallele e non in fase

$$\underline{E}(\underline{r},\omega)=\left(\underline{x}_0+2j\,\underline{y}_0\right)e^{-j\beta\cdot z}$$



$$\underline{E}_1=\left(\underline{x}_0\right)e^{-j\beta\cdot z}$$

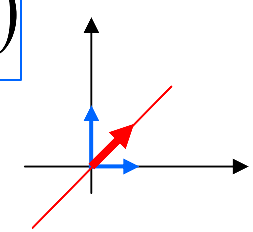
$$\underline{E}_2=\left(2j\,\underline{y}_0\right)e^{-j\beta\cdot z}$$

$$\vec{E}_1=\left(\underline{x}_0\right)\cos(\omega t-\beta z)$$

$$\vec{E}_2=\left(2\underline{y}_0\right)\cos\left(\omega t-\beta z-\pi/2\right)$$

$$\underline{E}'_2=\left(2\underline{y}_0\right)e^{-j\beta\cdot z}$$

$$\vec{E}'_2=\left(2\underline{y}_0\right)\cos(\omega t-\beta z)$$



$$\underline{E}(\underline{r},\omega)=\left(\underline{x}_0+2\underline{y}_0\right)e^{-j\beta\cdot z}$$

Onde piane: campo magnetico

Il campo H si ottiene dalla prima equazione di Maxwell

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r},\omega) = -j\omega\mu \underline{H}(\underline{r},\omega)$$

$$\underline{H}(\underline{r},\omega) = -\frac{1}{j\omega\mu}(-j\underline{k}) \times \underline{E}(\underline{r},\omega) = \frac{1}{\omega\mu}\underline{k} \times \underline{E}_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

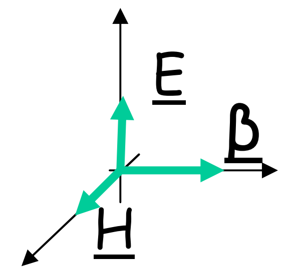
$$\underline{H}(\underline{r},\omega) = \underline{H}_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\underline{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu}\underline{k} \times \underline{E}_0$$

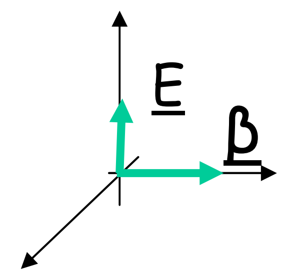
Classificazione delle onde

L'onda si definisce:

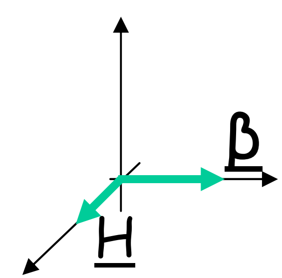
1. **TEM** (Trasversa ElettroMagnetica), se né $\underline{E}$ né $\underline{H}$ hanno componenti lungo la direzione di propagazione,



2. **TE** (Trasversa Elettrica), se $\underline{E}$ non ha componenti lungo la direzione di propagazione,



3. **TM** (Trasversa Magnetica), se $\underline{H}$ non ha componenti lungo la direzione di propagazione.



Potenza trasportata

Si calcola dal flusso del **vettore di Poynting** attraverso una superficie

$$\underline{S}(\underline{r},\omega)=\frac{1}{2}\underline{E}(\underline{r},\omega)\times\underline{H}^{*}(\underline{r},\omega)$$

onde piane uniformi
ζ= impedenza caratteristica mezzo

$$|\underline{S}|=\frac{1}{2}|\underline{E}||\underline{H}|=\frac{1}{2\zeta}|\underline{E}|^{2}$$

modulo del campo

$$E_{rms}=\frac{|\underline{E}|}{\sqrt{2}}$$

$$|\underline{S}|=\frac{1}{\zeta}E_{rms}^{2}$$

valore quadratico medio del campo

Attenuazione - CAMPO

L'onda si attenua:

$$A = \frac{E_{iniziale}}{E_{finale}} = \frac{E_0 e^{-\alpha x_0}}{E_0 e^{-\alpha x_1}} = e^{\alpha(x_1 - x_0)} = e^{\alpha \ell}$$

Attenuazione in dB

$$A_{dB} = 20 \log_{10}\left(e^{\alpha \ell}\right) = 20 \alpha \ell \log_{10} e = 8.68 \alpha \ell$$

0.434

Attenuazione per unità di lunghezza $A_{dB_{udl}} = 8.68 \alpha$

deciBel

A_{dB} = 6 dB

Che significa?

$$6 = 20 \log_{10} A \Longrightarrow A = 10^{3/10} = 2$$

Il campo iniziale era il doppio di quello finale

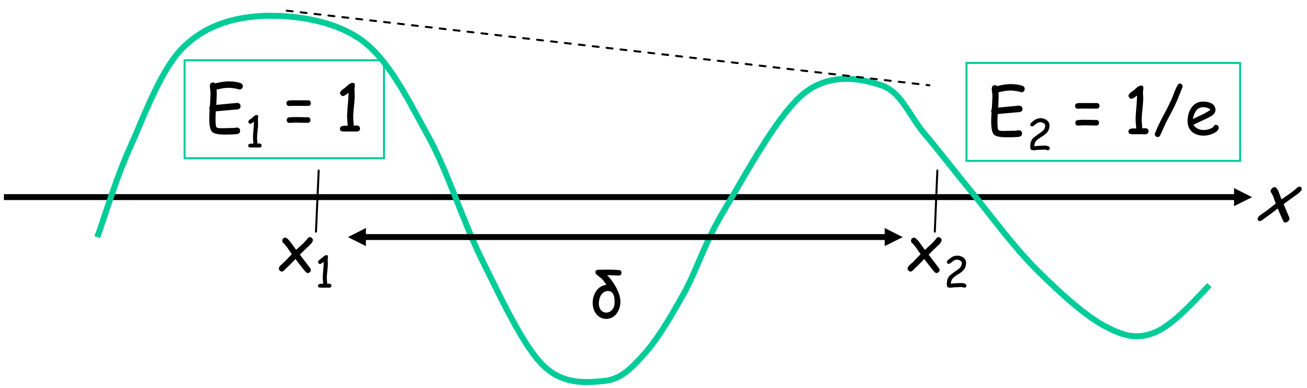
N.B.: parliamo di campi... in potenza è:

$$A_{dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{P_{in}}{P_{fin}}\right)$$

A_{dB} = 3 dB è "*il doppio*"...

Profondità di penetrazione

La ***profondità di penetrazione*** è definita come la distanza alla quale l'onda si è attenuata di 1/e



$$\boxed{\frac{1}{e} = e^{-\alpha\delta}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{1}{\alpha}}$$

Costanti primarie e secondarie

Le ***costanti primarie*** sono quelle caratteristiche del mezzo

ε , μ, σ

Le ***costanti secondarie*** sono definite come:

k = numero d'onda (per opu = cost prop) $$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$$

ζ = impedenza caratteristica del mezzo $$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}$$

Ripasso

Forma onda piana:

$$\underline{E}(\underline{r},\omega)=\underline{E}_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}}=\underline{E}_0 e^{-\underline{\alpha}\cdot\underline{r}} e^{-j\underline{\beta}\cdot\underline{r}}$$

Condizione di separabilità:

$$\underline{k}\cdot\underline{k}=k^2=(\underline{\beta}-j\underline{\alpha})\cdot(\underline{\beta}-j\underline{\alpha})=\omega^2\mu\varepsilon_c$$

$$\begin{cases}\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon \\ \underline{\beta}\cdot\underline{\alpha}=\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}\end{cases}$$

Polarizzazione:

$$\underline{k}\cdot\underline{E}_0=(\underline{\beta}-j\underline{\alpha})\cdot(\underline{E}_{0R}+j\underline{E}_{0J})=0$$

$$\vec{E}(\underline{r},t)=\underline{E}_{0R}\cos(\omega t)-\underline{E}_{0J}\sin(\omega t)$$

Velocità di fase: $v_f=\dfrac{\omega}{\beta}$

Lunghezza d'onda: $\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}$

Attenuazione per unità di lunghezza $A_{dB_{udl}}=8.68\alpha$

Problemi di radiazione

Determinazione del campo elettromagnetico irradiato da un'antenna

Potenziale vettore magnetico

- Consideriamo un mezzo LSOI in cui siano presenti correnti impresse
- Per il principio di sovrapposizione degli effetti si possono considerare prima le sole correnti elettriche e poi quelle magnetiche, ottenendo il campo effettivo come somma di quelli dovuti alle due sorgenti separatamente
- Consideriamo il caso di presenza delle sole correnti elettriche

$$\underline{\mathrm{J}}_{\mathrm{mi}} = 0$$

- Eseguendo la divergenza della prima di Maxwell, si ottiene $\left(\nabla \cdot \nabla \times \underline{E} = 0\right)$

$$\nabla \cdot \underline{\mathrm{H}} = 0$$

- Il campo $\underline{H}$ è quindi solenoidale e si può porre

$$\underline{\mathrm{H}} = \nabla \times \underline{\mathrm{A}}$$

- $\underline{A}$ è il potenziale vettore magnetico, definito a meno di un gradiente $\left(\nabla \times \nabla \phi = 0\right)$

$$\underline{\mathrm{A}}' = \underline{\mathrm{A}} + \nabla \phi \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\mathrm{H}} = \nabla \times \underline{\mathrm{A}}'$$

Potenziale scalare elettrico

- Sostituendo l'espressione di $\underline{H}$ nella prima di Maxwell

$$\nabla \times \underline{E} = -j\,\omega\,\mu\,\nabla \times \underline{A} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times \left(\underline{E} + j\,\omega\,\mu\,\underline{A}\right) = 0$$

- Il vettore tra parentesi è dunque irrotazionale e si può porre

$$\underline{E} + j\,\omega\,\mu\,\underline{A} = -\nabla V \qquad \Rightarrow \qquad \underline{E} = -j\,\omega\,\mu\,\underline{A} - \nabla V$$

- Per un diverso potenziale vettore $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla\phi$

$$\underline{E} = -j\,\omega\,\mu\left(\underline{A}' - \nabla\phi\right) - \nabla V = -j\,\omega\,\mu\,\underline{A}' - \nabla\left(V - j\,\omega\,\mu\,\phi\right)$$

- Si può dunque porre

$$V' = V - j\,\omega\,\mu\,\phi \qquad \Rightarrow \qquad \underline{E} = -j\,\omega\,\mu\,\underline{A}' - \nabla V'$$

- Si passa dalla coppia ($\underline{A}$ V) alla coppia ($\underline{A}'$ V′) con la trasformazione di gauge

$$\underline{A}' = \underline{A} + \nabla\phi$$

$$V' = V - j\,\omega\,\mu\,\phi$$

Equazione di Helmholtz non omogenea nel potenziale vettore magnetico

- Per determinare il campo elettromagnetico occorre determinare $\underline{A}$ e V
- Introducendo le espressioni per $\underline{E}$ e $\underline{H}$ nella seconda di Maxwell

$$\nabla \times \nabla \times \underline{A} = j\,\omega\,\varepsilon_c \left(-j\,\omega\,\mu\,\underline{A} - \nabla V\right) + \underline{J}_i$$

- Da cui si ottiene

$$\nabla\nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \underline{A} = k^2\,\underline{A} - j\,\omega\,\varepsilon_c\,\nabla V + \underline{J}_i$$

- Se $\underline{A}$ e V soddisfano la condizione di Lorenz

$$\nabla \cdot \underline{A} = -j\,\omega\,\varepsilon_c\,V \qquad \Rightarrow \qquad V = -\frac{\nabla \cdot \underline{A}}{j\,\omega\,\varepsilon_c}$$

- Si arriva all'*equazione di Helmholtz non omogenea* nel potenziale vettore $\underline{A}$

$$\boxed{\nabla^2 \underline{A} + k^2\,\underline{A} = -\underline{J}_i}$$

- Ricavato $\underline{A}$, si ha per $\underline{E}$ e $\underline{H}$

$$\boxed{\underline{E} = -j\,\omega\,\mu\,\underline{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{A}}{j\,\omega\,\varepsilon_c} = -j\,\omega\,\mu\left(\underline{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{A}}{k^2}\right) \qquad \underline{H} = \nabla \times \underline{A}}$$

Problema duale: presenza di sole correnti magnetiche impresse

- Le equazioni per il caso in cui siano presenti le sole correnti magnetiche impresse ($\underline{J}_i = 0$) si ottengono applicando il principio di dualità

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0$$

$$\underline{E} = -\nabla \times \underline{F} \qquad \underline{F} = \text{potenziale vettore elettrico}$$

$$\underline{H} = -j\,\omega\,\varepsilon_c\,\underline{F} - \nabla U \qquad U = \text{potenziale scalare magnetico}$$

$$\nabla \cdot \underline{F} = -j\,\omega\,\mu\,U$$

$$\nabla^2 \underline{F} + k^2\,\underline{F} = -\underline{J}_{mi}$$

$$\underline{H} = -j\,\omega\,\varepsilon_c\,\underline{F} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{F}}{j\,\omega\,\mu} \quad \Rightarrow \quad \underline{H} = -j\,\omega\,\varepsilon_c \left(\underline{F} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{F}}{k^2} \right)$$

Soluzione del problema di radiazione

- Consideriamo un mezzo LSOI in cui siano presenti solo correnti elettriche impresse che occupino un volume limitato τ
- Il potenziale vettore magnetico $\underline{A}$ deve soddisfare l'equazione di Helmholtz

$$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\underline{J}_i$$

- Proiettando l'equazione sui tre assi cartesiani x_1, x_2, x_3 (x, y, z)

$$\nabla^2 A_s + k^2 A_s = -J_{is} \qquad (s = 1, 2, 3)$$

- Ogni componente cartesiana di $\underline{A}$ deve soddisfare separatamente un'equazione differenziale di Helmholtz non omogenea scalare
- L'equazione di Helmholtz, per poter essere risolta, richiede delle opportune condizioni al contorno sul potenziale vettore, derivate a partire da quelle sul campo elettromagnetico
- Se anche le condizioni al contorno si possono separare per le tre componenti cartesiane, il problema complessivo da vettoriale diventa scalare

Se le correnti irradiano in spazio libero il problema è scalarizzabile

Funzione di Green

- Per risolvere l'equazione di Helmholtz scalare introduciamo l'operatore L

$$\mathrm{L} = -\left(\nabla^2 + k^2\right)$$

- Ponendo A_s = f e J_{is} = h

$$\mathrm{L}\; f = h$$

- Si definisce funzione di Green dell'operatore L, con le associate condizioni al contorno, la soluzione dell'equazione

$$\mathrm{L}\; G(\underline{r},\underline{r}') = \delta(\underline{r}-\underline{r}') \qquad \underline{r} = \text{punto di osservazione} \qquad \underline{r}' = \text{punto di sorgente}$$

- La funzione di Green rappresenta, in generale, la risposta impulsiva spaziale del sistema rappresentato attraverso l'operatore L

Nel caso dell'equazione di Helmholtz per il potenziale vettore magnetico, la funzione di Green rappresenta il potenziale prodotto da un impulso spaziale di corrente

Soluzione mediante l'utilizzo della funzione di Green

- Data una generica distribuzione di correnti impresse in τ, si può sempre pensare di scomporla in una serie di infinite sorgenti impulsive di ampiezza infinitesima
- Grazie al principio di sovrapposizione degli effetti, il potenziale sarà dato dalla somma integrale dei potenziali dovuti alle singole sorgenti impulsive
- In formule...

$$\mathrm{L} \quad G(\underline{r},\underline{r}') = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

- Moltiplicando per $h(\underline{r}')$ e integrando su τ rispetto alla variabile $\underline{r}'$

$$\int_\tau h(\underline{r}')\,\mathrm{L} \quad G(\underline{r},\underline{r}')\,d\tau' = \int_\tau h(\underline{r}')\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,d\tau'$$

- Osservando che L opera su $\underline{r}$ e può quindi essere portato fuori integrale

$$\mathrm{L} \quad \int_\tau h(\underline{r}')\,G(\underline{r},\underline{r}')\,d\tau' = h(\underline{r})$$

- Confrontando la precedente equazione con la L f = h

$$\boxed{f(\underline{r}) = \int_\tau h(\underline{r}')\,G(\underline{r},\underline{r}')\,d\tau'}$$

Equazione di Helmholtz scalare per lo spazio libero e condizioni al contorno

- Il problema di radiazione per lo spazio libero riempito di un mezzo LSOI richiede la soluzione dell'equazione di Helmholtz scalare

$$\nabla^2 A_s + k^2 A_s = -J_{is} \qquad (s = 1, 2, 3)$$

- Le condizioni al contorno utilizzate, nel caso di un distribuzione di sorgenti contenute in un volume τ limitato, sono le condizioni di radiazione o di Sommerfeld

$$\lim_{r \to \infty} \left(r \left| A_s \right| \right) = \ell \qquad (s = 1, 2, 3)$$

$$\lim_{r \to \infty} \left[r \left(\frac{\partial A_s}{\partial r} + j\,k\,A_s \right) \right] = 0 \qquad (s = 1, 2, 3)$$

- La prima condizione impone che il potenziale vada a zero all'infinito almeno come 1/r e deriva da considerazioni energetiche
- La seconda condizione impone che l'onda all'infinito abbia le caratteristiche di un'onda sferica che si propaghi radialmente allontanandosi dalle sorgenti

Funzione di Green per lo spazio libero (1/5)

- La funzione di Green per lo spazio libero deve soddisfare

$$-\left(\nabla^2 + k^2\right) G(\underline{r}, \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

- Facendo coincidere il punto di sorgente con l'origine ($\underline{r}' = 0$)

$$-\left(\nabla^2 + k^2\right) G(\underline{r}) = \delta(\underline{r})$$

- Assumendo un sistema di coordinate sferiche e sfruttando la simmetria sferica dello spazio libero e della sorgente

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \qquad ; \qquad G(\underline{r}) = G(r)$$

- Esprimendo l'operatore ∇^2 in coordinate sferiche

$$-\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dG(r)}{dr} \right] + k^2\, G(r) \right\} = \delta(r)$$

- Cercando la soluzione per $r \neq 0$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dG(r)}{dr} \right] + k^2\, G(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dG(r)}{dr} \right] + k^2\, r\, G(r) = 0$$

Funzione di Green per lo spazio libero (2/5)

- Imposizioni…

$$\tilde{G}(r) = r\,G(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{G}}{dr} = r\,\frac{dG}{dr} + G \quad \Rightarrow \quad r\,\frac{dG}{dr} = \frac{d\tilde{G}}{dr} - G$$

- Moltiplicando per r l'ultima equazione

$$r^2\,\frac{dG}{dr} = r\,\frac{d\tilde{G}}{dr} - r\,G = r\,\frac{d\tilde{G}}{dr} - \tilde{G}$$

- Sostituendo nell'equazione di partenza

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{d\tilde{G}}{dr} - \tilde{G}\right) + k^2\,\tilde{G} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\left(\frac{d\tilde{G}}{dr} + r\,\frac{d^2\tilde{G}}{dr^2} - \frac{d\tilde{G}}{dr}\right) + k^2\,\tilde{G} = 0$$

- Si giunge finalmente alla semplice equazione

$$\frac{d^2\tilde{G}}{dr^2} + k^2\,\tilde{G} = 0$$

- La soluzione cercata è dunque ($k \neq 0$)

$$\tilde{G}(r) = C_1\,e^{-jkr} + C_2\,e^{jkr} \quad \Rightarrow \quad G(r) = C_1\,\frac{e^{-jkr}}{r} + C_2\,\frac{e^{jkr}}{r}$$

Funzione di Green per lo spazio libero (3/5)

- Restano da imporre le condizioni al contorno, per determinare C_1 e C_2
- Per la prima condizione…

$$r\,|G(r)| = \left| C_1\, e^{-j\,k_R\,r}\, e^{-k_J\,r} + C_2\, e^{j\,k_R\,r}\, e^{k_J\,r} \right| = \ell \quad \text{per} \quad r \to \infty$$

- Perché l'espressione risulti limitata per $r \to \infty$ serve $C_2 = 0$ (se $k_J \neq 0 \Rightarrow$ mezzo dissipativo)
- Per la seconda condizione…

$$r\,\frac{dG}{dr} + j\,k\,r\,G = \frac{d\tilde{G}}{dr} - G + j\,k\,r\,G = j\,k\left(-C_1\, e^{-j\,k\,r} + C_2\, e^{j\,k\,r}\right) +$$

$$+(j\,k\,r - 1)\left(C_1\,\frac{e^{-j\,k\,r}}{r} + C_2\,\frac{e^{j\,k\,r}}{r}\right) = -C_1\,\frac{e^{-j\,k\,r}}{r} + C_2\, e^{j\,k\,r}\left(2\,j\,k - \frac{1}{r}\right) = 0 \quad \text{per} \quad r \to \infty$$

- Perché l'espressione tenda a zero per $r \to \infty$ serve $C_2 = 0$ (anche se $k_J = 0$)
- In conclusione la soluzione è

$$\boxed{G(r) = C_1\,\frac{e^{-j\,k\,r}}{r}}$$

Funzione di Green per lo spazio libero (4/5)

- Per determinare C_1 includiamo ora il punto r = 0 e consideriamo la sorgente
- Integriamo l'equazione di partenza ad un volume sferico τ_0 di raggio r_0 avente centro nell'origine, limitato dalla superficie sferica S_0

$$-\int_{\tau_0} \nabla^2 G \, d\tau - k^2 \int_{\tau_0} G \, d\tau = \int_{\tau_0} \delta(\underline{r}) \, d\tau$$

- Applicando il teorema della divergenza

$$-\oint_{S_0} \underline{n} \cdot \nabla G \, dS - k^2 \int_{\tau_0} G \, d\tau = 1 \quad \Rightarrow \quad -\oint_{S_0} \frac{\partial G}{\partial n} dS - k^2 \int_{\tau_0} G \, d\tau = 1$$

- Si ottiene, per la sfera di raggio r_0

$$-\left.\frac{dG}{dr}\right|_{r=r_0} \oint_{S_0} dS - k^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} G \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -4\pi r_0^2 \left.\frac{dG}{dr}\right|_{r=r_0} - k^2 \, C_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{r_0} r \, e^{-jkr} \, dr = 1$$

Funzione di Green per lo spazio libero (5/5)

- Facendo tendere il raggio r_0 della sfera a zero, dalla precedente espressione si vede che il contributo dell'integrale volumetrico tenderà anch'esso a zero, ottenendo

$$\lim_{r_0 \to 0}\left[-4\pi\, r_0^2 \left.\frac{dG}{dr}\right|_{r=r_0} - k^2\, C_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{r_0} r\, e^{-j\,k\,r}\, dr \right] =$$

$$= \lim_{r_0 \to 0}\left[-4\,\pi\, r_0^2\, C_1 \frac{\left(-j\,k\,r_0 - 1\right) e^{-j\,k\,r_0}}{r_0^2} \right] = 4\,\pi\, C_1 = 1$$

- Da cui si ottiene

$$C_1 = \frac{1}{4\,\pi} \qquad \Rightarrow \qquad G(r) = \frac{e^{-j\,k\,r}}{4\,\pi\, r}$$

- Se la sorgente non è posizionata nell'origine basterà sostituire r con $|\underline{r} - \underline{r}'|$, ottenendo finalmente la *funzione di Green per lo spazio libero*

$$\boxed{G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{e^{-j\,k\,|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\,\pi\, |\underline{r}-\underline{r}'|}}$$

Come si ricava il potenziale vettore?

- La conoscenza della funzione di Green per lo spazio libero permette di ricavare il potenziale vettore prodotto da un'assegnata distribuzione di correnti elettriche impresse nello spazio libero

$$A_s(\underline{r}) = \int_\tau J_{is}(\underline{r}')\, G(\underline{r},\underline{r}')\, d\tau' = \int_\tau J_{is}(\underline{r}')\, \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d\tau'$$

- L'integrale va esteso a tutto lo spazio, ovvero al solo volume occupato dalle sorgenti
- Moltiplicando per il versore coordinato $\underline{x}_{0s}$ e sommando per s da 1 a 3

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_\tau \underline{J}_i(\underline{r}')\, \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d\tau'$$

- La precedente è la soluzione dell'equazione di Helmholtz vettoriale non omogenea per il potenziale vettore magnetico in presenza di una generica distribuzione di correnti elettriche impresse nello spazio libero