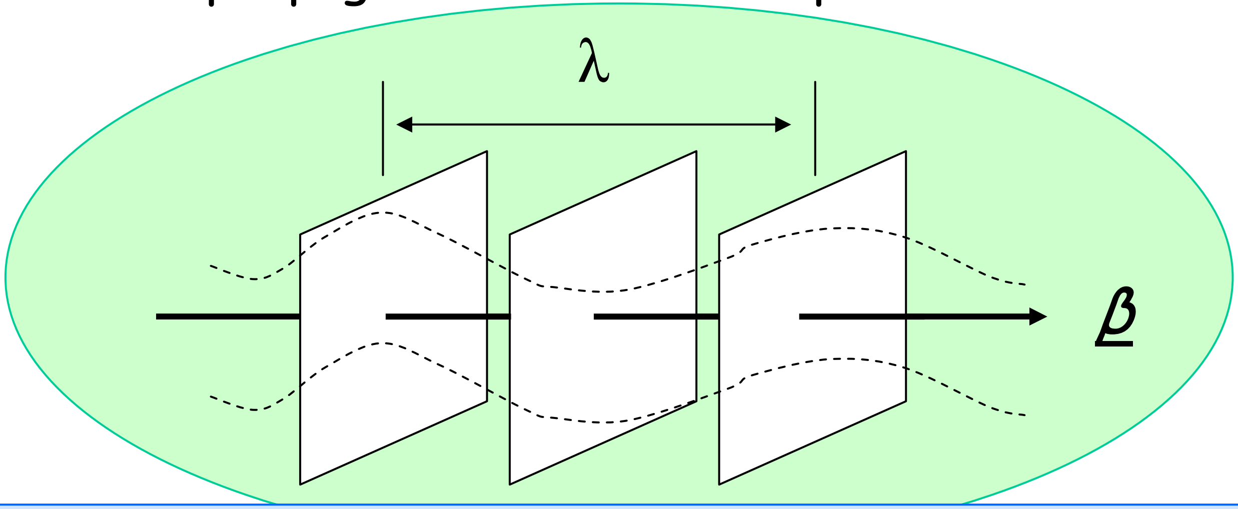
Esercitazione n. 4

Ripasso onde piane: riflessione e trasmissione all'interfaccia piana tra due mezzi

Impatto ambientale dei campi elettromagnetici

Propagazione onda piana

- Punto di partenza per l'ottica geometrica è, in qualche modo, lo studio della propagazione delle onde piane.



infatti...

- molti fenomeni propagativi possono essere schematizzati con la **propagazione** di onde piane;
- il campo lontano di un'antenna è **localmente** di tipo onda piana;
- nelle **strutture guidanti** si propagano onde piane;
- un qualunque campo elettrico (trasformabile secondo Fourier) si può esprimere come somma integrale di **infinite onde piane** di ampiezza infinitesima.

Propagazione onde piane nello spazio libero

$$\underline{E}(\underline{r},\omega) = \underline{E}_0 e^{-\underline{\alpha}\cdot\underline{r}} e^{-j\underline{\beta}\cdot\underline{r}}$$

ampiezza + polarizzazione **fase**

- La propagazione dell'onda è caratterizzata ***LUNGO LA DIREZIONE DI r*** dalla costante di attenuazione α, legata alle caratteristiche del mezzo, e dalla costante di fase β.
- In generale, risulta:

$$\underline{k} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c = \omega^2 \mu \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right)$$

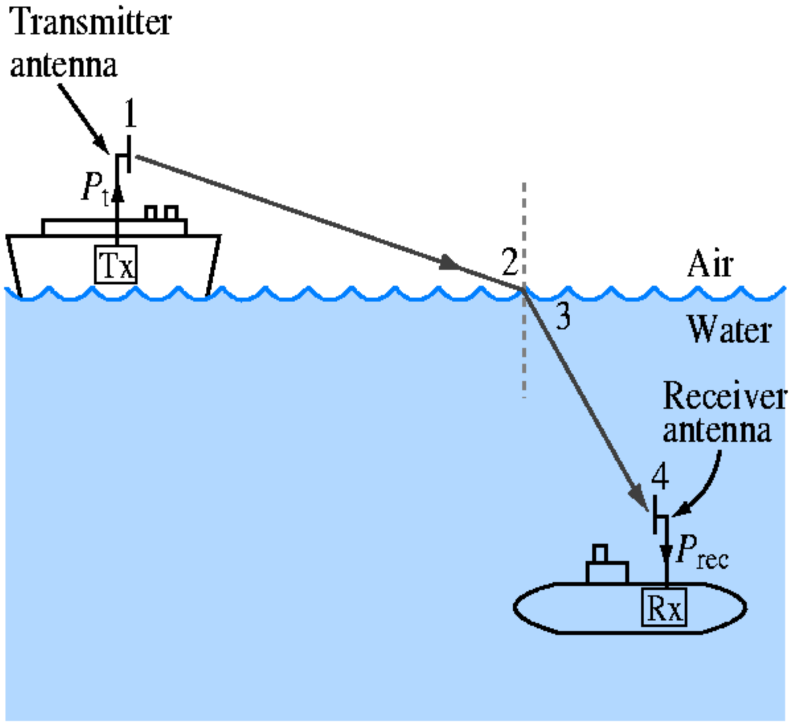
- La velocità di fase, velocità di un ipotetico osservatore per non vedere variazioni di fase dell'onda, è data da:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

Propagazione onda piana

- Quando un'onda piana incide alla superficie di separazione tra due mezzi con caratteristiche elettromagnetiche diverse, nascono due onde: una **riflessa** che si propaga nel primo mezzo (da cui proveniva l'onda) ed una **trasmessa (rifratta)** nel secondo mezzo.

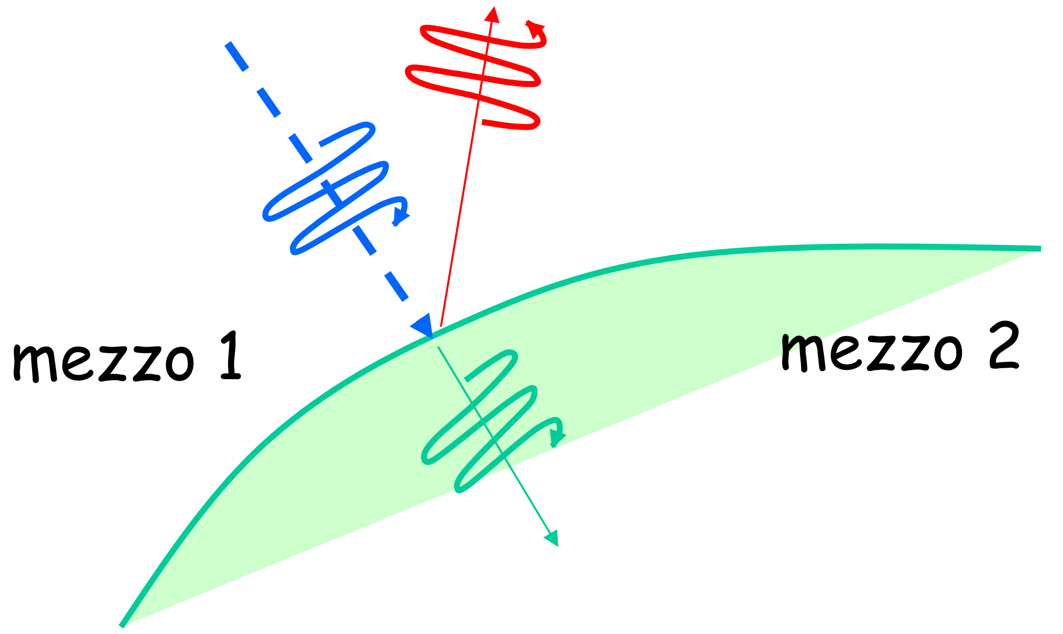
- L'onda riflessa e trasmessa si possono calcolare a partire dall'onda incidente e dalle condizioni al contorno che devono essere soddisfatte dal campo elettromagnetico alla superficie di separazione di due mezzi.



- Il **campo totale** nel primo mezzo sarà dato dalla somma dell'onda incidente con l'onda riflessa.

Riflessione e rifrazione

Onda piana.....



Interfaccia

$$\underline{n}\cdot\left(\underline{D}_2-\underline{D}_1\right)=\rho_s$$
$$\underline{n}\times\left(\underline{H}_2-\underline{H}_1\right)=\underline{J}_s$$

$$\underline{n}\times\left(\underline{E}_2-\underline{E}_1\right)=0$$
$$\underline{n}\times\left(\underline{H}_2-\underline{H}_1\right)=\underline{0}$$

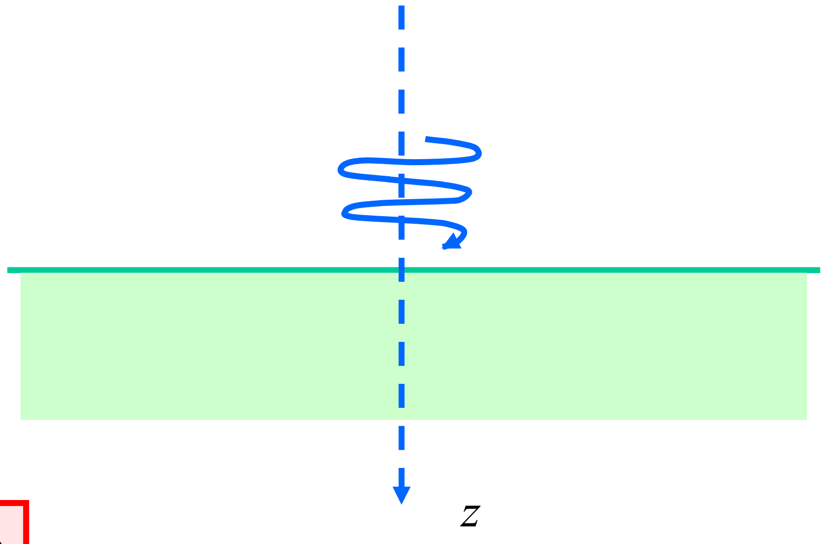
Se nessuno dei due è un conduttore perfetto

Incidenza normale - 1

Ipotesi:

- superficie di separazione piana (**ortogonale a *z***);
- mezzi lineari, omogenei, isotropi, stazionari, non dispersivi ($\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1, \varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$);
- onda incidente: piana uniforme polarizzata linearmente ($\underline{E}_0 = E_0 \underline{x}_0$)

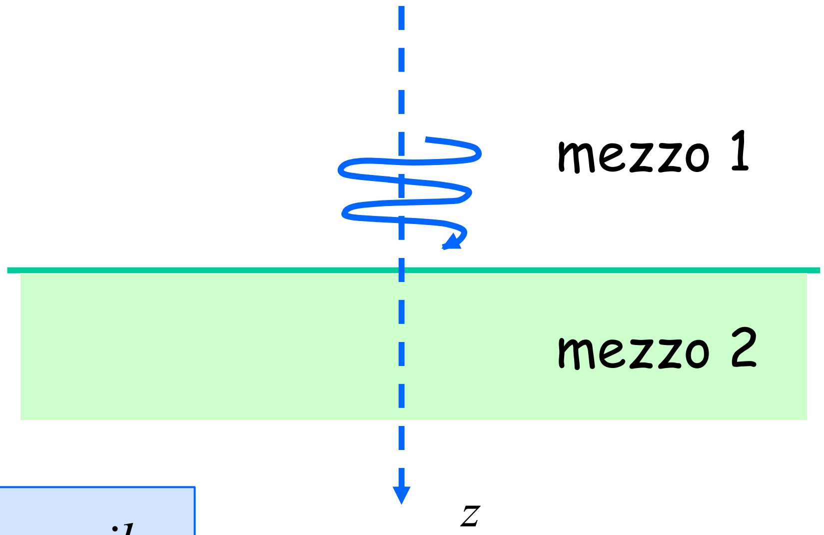
N.B. un'onda con una generica polarizzazione ellittica si può sempre scomporre nella somma di due onde polarizzate linearmente non in fase



Non c'è nessuna perdita di generalità

Incidenza normale

L'onda incidente sarà allora:



$$\underline{E}^i = \underline{E}^i_0 e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}} = E^i_0 \underline{x}_0 e^{-jk_1 z}$$

$$\underline{H}^i = \frac{k_1}{\omega\mu} E^i_0 \underline{z}_0 \times \underline{x}_0 e^{-jk_1 z} = H^i_0 \underline{y}_0 e^{-jk_1 z}$$

con la costante di propagazione del mezzo 1: $k_1 = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_{c1}}$

e impedenza d'onda: $\dfrac{E^i_0}{H^i_0} = \zeta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_{c1}}}$

Incidenza normale

- L'onda riflessa e trasmessa (rifratta) si possono supporre a loro volta onde piane con una generica direzione di propagazione

$$\boxed{\underline{E}^r = \underline{E}^r_0 e^{-j\underline{k}^r \cdot \underline{r}} = \underline{E}^r_0 e^{-j\left(k^r_x x + k^r_y y + k^r_z z\right)}}$$

$$\boxed{\underline{E}^t = \underline{E}^t_0 e^{-j\underline{k}^t \cdot \underline{r}} = \underline{E}^t_0 e^{-j\left(k^t_x x + k^t_y y + k^t_z z\right)}}$$

con $\underline{k}^r$ e $\underline{k}^t$ costanti di propagazione dell'onda riflessa (si propaga nel mezzo 1) e trasmessa (si propaga nel mezzo 2).

- Analoga espressione si può scrivere per il campo magnetico delle due onde.

Incidenza normale - 2

Imponendo le condizioni al contorno all'interfaccia

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{E}^t - \left(\underline{E}^i + \underline{E}^r\right)\right] = 0$$

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{H}^t - \left(\underline{H}^i + \underline{H}^r\right)\right] = 0$$

su $z=0$

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{E}^t{}_0 e^{-j\left(k_x^t x + k_y^t y\right)} - \left(\underline{E}^i{}_0 + \underline{E}^r{}_0 e^{-j\left(k_x^r x + k_y^r y\right)}\right)\right] = 0$$

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{H}^t{}_0 e^{-j\left(k_x^t x + k_y^t y\right)} - \left(\underline{H}^i{}_0 + \underline{H}^r{}_0 e^{-j\left(k_x^r x + k_y^r y\right)}\right)\right] = 0$$

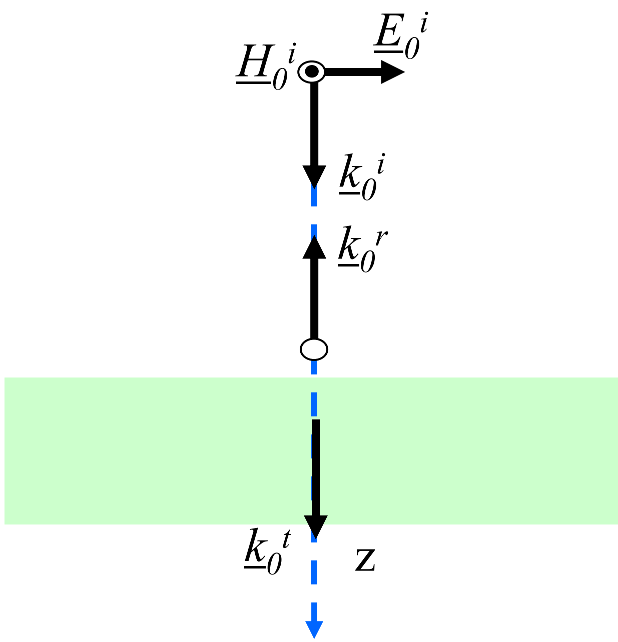
Incidenza normale - 3

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{E}^t_0 e^{-j\left(k_x^t x + k_y^t y\right)} - \left(\underline{E}^i_0 + \underline{E}^r_0 e^{-j\left(k_x^r x + k_y^r y\right)} \right) \right] = 0$$

verificata ∀ (x,y)....

$$k_x^r = k_y^r = 0$$

$$k_x^t = k_y^t = 0$$



$$\underline{E}^r = \underline{E}^r_0 e^{-jk_z^r z} = \underline{E}^r_0 e^{jk_1 z}$$

$$\underline{E}^t = \underline{E}^t_0 e^{-jk_z^t z} = \underline{E}^t_0 e^{-jk_2 z}$$

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{E}^t_0 - \left(\underline{E}^i_0 + \underline{E}^r_0 \right) \right] = 0$$

Incidenza normale - 4

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{E}^t_0 - \left(\underline{E}^i_0 + \underline{E}^r_0 \right) \right] = 0$$

$$E^t_y - E^r_y = 0 \quad \Rightarrow \quad E^t_y = E^r_y = 0$$

$$E^t_x - \left(E^i_0 + E^r_x \right) = 0$$

non c'è motivo per generare componenti lungo y...

$$\boxed{\underline{E}^r = E^r_0\, \underline{x}_0 e^{jk_1 z}}$$

$$\boxed{\underline{H}^r = \frac{k_1}{\omega\mu} \left(-\underline{z}_0 \right) \times E^r_0\, \underline{x}_0 e^{jk_1 z} = -H^r_0\, \underline{y}_0 e^{jk_1 z}}$$

$$\boxed{\underline{E}^t = E^t_0\, \underline{x}_0 e^{-jk_2 z}}$$

$$\boxed{\underline{H}^t = \frac{k_2}{\omega\mu} \left(\underline{z}_0 \right) \times E^t_0\, \underline{x}_0 e^{-jk_2 z} = H^t_0\, \underline{y}_0 e^{-jk_2 z}}$$

Incidenza normale - 5

$$E_x^t - \left(E_0^i + E_x^r\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0^t = E_0^i + E_0^r$$

$$H_0^t = H_0^i - H_0^r \quad \Rightarrow \quad \frac{E_0^t}{\zeta_2} = \frac{E_0^i - E_0^r}{\zeta_1}$$

$$\boxed{S_E = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1}}$$

Coefficiente di riflessione del campo elettrico

$$\boxed{T_E = \frac{E_0^t}{E_0^i} = 1 + S_E = 1 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{2\zeta_2}{\zeta_2 + \zeta_1}}$$

Coefficiente di trasmissione

Incidenza normale - 6

Ipotesi:

- mezzo 1 non dissipativo ($\sigma_1 = 0$);
- mezzo 2 buon conduttore ($\sigma_2 >> \omega\varepsilon_2$)

$$\boxed{\zeta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}$$

$$\boxed{\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{c2}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\sigma_2}}}$$

$$\boxed{\left|\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right| = \left|(1+j)\sqrt{\frac{\omega\varepsilon_1}{2\sigma_2}}\right| << 1}$$

$$\boxed{S_E \to -1}$$

$$\boxed{T_E \to 0}$$

Il campo è quasi tutto riflesso.....

Incidenza normale - 7 (2 conduttore perf.)

Ipotesi:

- mezzo 1 non dissipativo ($\sigma_1=0$);
- mezzo 2 conduttore perfetto ($\sigma_2 \to \infty$)

Il campo elettromagnetico nel secondo mezzo è nullo!

$$\underline{z}_0 \times \left[-\left(\underline{E}^i_0 + \underline{E}^r_0 e^{-j\left(k^r_x x + k^r_y y\right)} \right) \right] = 0$$

$$\underline{z}_0 \times \left[-\left(\underline{H}^i_0 + \underline{H}^r_0 e^{-j\left(k^r_x x + k^r_y y\right)} \right) \right] = \underline{J}_S$$

$$k^r_x = k^r_y = 0$$

$$\underline{E}^r = E^r_0 \underline{x}_0 e^{jk_1 z}$$

$$E^r_0 = -E^i_0$$

$$H^r_0 = \frac{E^r_0}{\zeta_1} = \frac{-E^i_0}{\zeta_1} = -H^i_0$$

$$\underline{H}^r = -H^r_0 \underline{y}_0 e^{jk_1 z} = H^i_0 \underline{y}_0 e^{jk_1 z}$$

Incidenza normale - 8 (2 cond. perf.)

$$E_0^r = -E_0^i$$

Il coefficiente di riflessione è uguale a 1 in modulo

Dalla condizione su H si ricava la J_s....

$$\underline{z}_0 \times \left[-\left(\underline{H}_0^i + \underline{H}_0^r\right)\right] = \underline{J}_S$$

$$\underline{z}_0 \times \left(-2\underline{H}_0^i\right) = \underline{J}_S$$

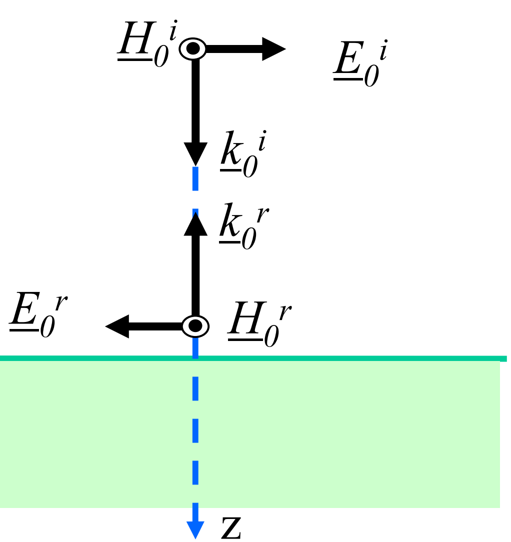
$$\underline{J}_S = 2H_0^i\,\underline{x}_0 = 2\frac{E_0^i}{\zeta_1}\underline{x}_0$$

Incidenza normale - 9 (2 cond. perf.)

Campo totale nel mezzo 1:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}^i + \underline{E}^r = E_0^i \underline{x}_0 \left(e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z}\right) = -2jE_0^i \underline{x}_0 \sin(k_1 z)$$

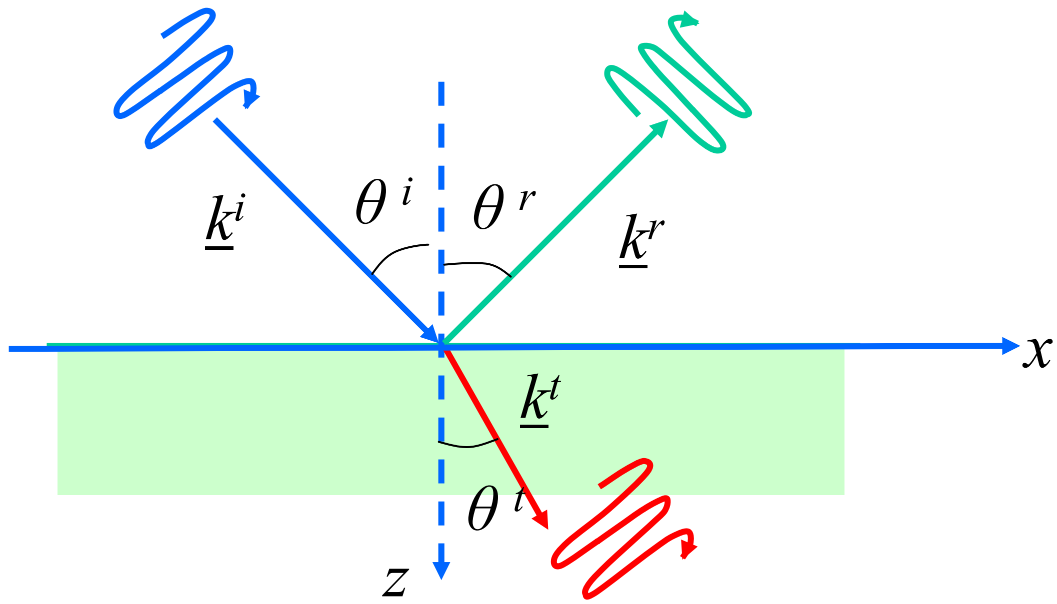
$$\underline{H}_1 = \underline{H}^i + \underline{H}^r = H_0^i \underline{y}_0 \left(e^{-jk_1 z} + e^{jk_1 z}\right) = 2H_0^i \underline{y}_0 \cos(k_1 z)$$



E ed *H* sono ortogonali nello spazio e in quadratura nel tempo

Onda stazionaria!

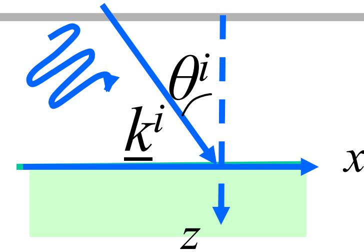
Incidenza obliqua



Onda piana uniforme che incide obliquamente sulla superficie di separazione tra due mezzi lineari, omogenei, isotropi, stazionari, non dispersivi e non dissipativi ($\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1=0, \varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2=0$)

Vettore propagazione

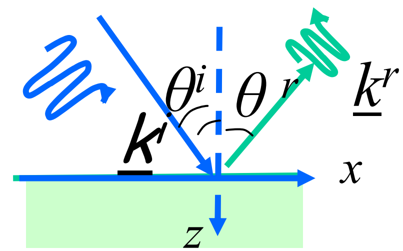
$$\boxed{\underline{k}^{i} = k_x^{i}\,\underline{x}_0 + k_z^{i}\,\underline{z}_0 = k_1 \sin\left(\theta^{i}\right)\underline{x}_0 + k_1 \cos\left(\theta^{i}\right)\underline{z}_0}$$



$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{E}^{t}{}_0\, e^{-j\left(k_x^t x + k_y^t y\right)} - \left(\underline{E}^{i}{}_0\, e^{-j\left(k_x^i x\right)} + \underline{E}^{r}{}_0\, e^{-j\left(k_x^r x + k_y^r y\right)}\right)\right] = 0$$

$$k_x^r = k_x^t = k_x^i$$

$$k_y^r = k_y^t = 0$$



$$\boxed{k_1 \sin\left(\theta^{i}\right) = k_1 \sin\left(\theta^{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta^{i} = \theta^{r}}$$

Legge della riflessione

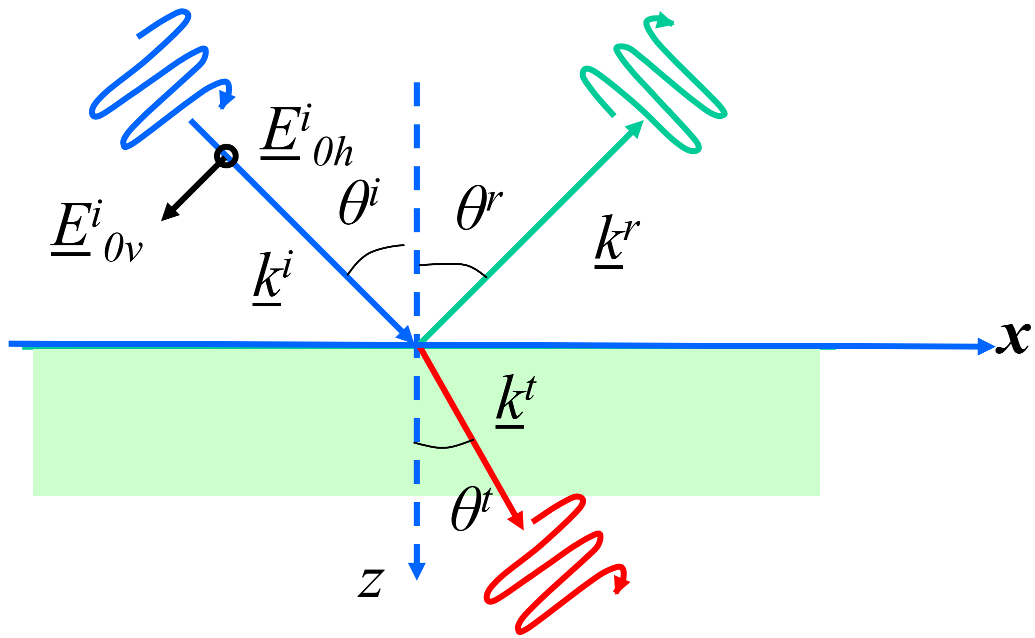
$$k_1 \sin\left(\theta^{i}\right) = k_2 \sin\left(\theta^{t}\right)$$

$$\sin\left(\theta^{t}\right) = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}}\, \sin\left(\theta^{i}\right)$$

Legge di Snell
o della rifrazione

Incidenza obliqua - 2

$$\sin\left(\theta^t\right) = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\,\sin\left(\theta^i\right) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\,\sin\left(\theta^i\right) \le 1 \;\Rightarrow\; \theta^t \text{ reale}$$



polarizzazione orizzontale

$$\underline{E}^i{}_{0h} = E^i{}_{0h}\,\underline{y}_0$$

polarizzazione verticale

$$\underline{H}^i{}_{0v} = H^i{}_{0v}\,\underline{y}_0$$

Incidenza obliqua - 3 (θ^t reale, pol. orizz.)

$$\underline{E}^i_{0h} = E^i_{0h}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{H}^i_{0h} = \frac{k_1}{\omega\mu_1}\left(\sin\theta^i\,\underline{x}_0 + \cos\theta^i\,\underline{z}_0\right)\times E^i_{0h}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{H}^i_{0h} = \frac{E^i_{0h}}{\zeta_1}\left(\sin\theta^i\,\underline{z}_0 - \cos\theta^i\,\underline{x}_0\right)$$

$$\underline{E}^r_{0h} = E^r_{0h}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{H}^r_{0h} = \frac{k_1}{\omega\mu_1}\left(\sin\theta^r\,\underline{x}_0 - \cos\theta^r\,\underline{z}_0\right)\times E^r_{0h}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{H}^r_{0h} = \frac{E^r_{0h}}{\zeta_1}\left(\sin\theta^r\,\underline{z}_0 + \cos\theta^r\,\underline{x}_0\right)$$

$$\underline{E}^t_{0h} = E^t_{0h}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{H}^t_{0h} = \frac{E^t_{0h}}{\zeta_2}\left(\sin\theta^t\,\underline{z}_0 - \cos\theta^t\,\underline{x}_0\right)$$

Incidenza obliqua - 4 (θ^t reale, pol. orizz.)

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{E}^t_{0h} - \left(\underline{E}^i_{0h} + \underline{E}^r_{0h} \right) \right] = 0$$

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{H}^t_{0h} - \left(\underline{H}^i_{0h} + \underline{H}^r_{0h} \right) \right] = 0$$

$$E^t_{0h} - \left(E^i_{0h} + E^r_{0h} \right) = 0$$

$$E^t_{0h} \frac{\cos\theta^t}{\zeta_2} - \left(E^i_{0h} - E^r_{0h} \right) \frac{\cos\theta^i}{\zeta_1} = 0$$

$$S_{E_h} = \frac{\dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}\cos\theta^i - \cos\theta^t}{\dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}\cos\theta^i + \cos\theta^t}$$

Incidenza obliqua - 5 (θ^t reale, pol. orizz.)

$$S_{E_h} = \frac{\dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}\cos\theta^i - \cos\theta^t}{\dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}\cos\theta^i + \cos\theta^t}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{S_{E_h} = \frac{\sin\left(\theta^t - \theta^i\right)}{\sin\left(\theta^t + \theta^i\right)}}$$

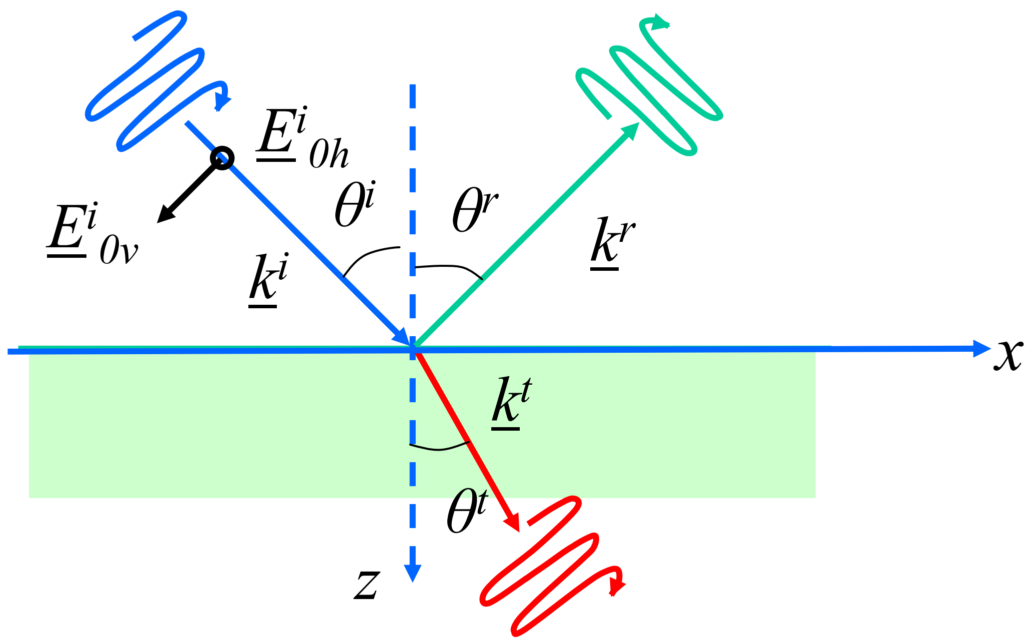
$$\Downarrow$$

Se i due mezzi sono diversi ($\theta^t \neq \theta^i$) non si può annullare

Incidenza obliqua - 6

polarizzazione orizzontale
$\underline{E}^i{}_{0h} = E^i{}_{0h}\,\underline{y}_0$

$$S_{E_h} = \frac{\sin\left(\theta^t - \theta^i\right)}{\sin\left(\theta^t + \theta^i\right)}$$



polarizzazione verticale
$\underline{H}^i{}_{0v} = H^i{}_{0v}\,\underline{y}_0$

Incidenza obliqua - 7 (θ^t reale, pol. vert.)

$$\underline{H}^i_{0v} = H^i_{0v}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{E}^i_{0v} = -\frac{k_1}{\omega\varepsilon_1}\left(\sin\theta^i\,\underline{x}_0 + \cos\theta^i\,\underline{z}_0\right)\times H^i_{0v}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{E}^i_{0v} = -\zeta_1 H^i_{0v}\left(\sin\theta^i\,\underline{z}_0 - \cos\theta^i\,\underline{x}_0\right)$$

$$\underline{H}^r_{0v} = H^r_{0v}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{E}^r_{0v} = -\frac{k_1}{\omega\varepsilon_1}\left(\sin\theta^r\,\underline{x}_0 - \cos\theta^r\,\underline{z}_0\right)\times H^r_{0v}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{E}^r_{0v} = -\zeta_1 H^r_{0v}\left(\sin\theta^r\,\underline{z}_0 + \cos\theta^r\,\underline{x}_0\right)$$

$$\underline{H}^t_{0v} = H^t_{0v}\,\underline{y}_0$$

$$\underline{E}^t_{0h} = -\zeta_2 H^t_{0h}\left(\sin\theta^t\,\underline{z}_0 - \cos\theta^t\,\underline{x}_0\right)$$

Incidenza obliqua - 8 (θ^t reale, pol. vert.)

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{E}^t_{0v} - \left(\underline{E}^i_{0v} + \underline{E}^r_{0v} \right) \right] = 0$$

$$\underline{z}_0 \times \left[\underline{H}^t_{0v} - \left(\underline{H}^i_{0v} + \underline{H}^r_{0v} \right) \right] = 0$$

$$H^t_{0v} - \left(H^i_{0v} + H^r_{0v} \right) = 0$$

$$\zeta_2 H^t_{0v} \cos\theta^t - \zeta_1 \left(H^i_{0v} - H^r_{0v} \right) \cos\theta^i = 0$$

$$\boxed{S_{H_v} = \frac{\cos\theta^i - \dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}\cos\theta^t}{\cos\theta^i + \dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}\cos\theta^t}}$$

Incidenza obliqua - 9 (θ^t reale, pol. vert.)

$$S_{E_v} = \frac{E_{0v}^r}{E_{0v}^i} = \frac{\zeta_1 H_{0v}^r}{\zeta_1 H_{0v}^i} = S_{H_v}$$

$$S_{E_v} = \frac{\cos\theta^i - \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\cos\theta^t}{\cos\theta^i + \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\cos\theta^t} = \ldots = \frac{\tan\left(\theta^i - \theta^t\right)}{\tan\left(\theta^i + \theta^t\right)}$$

Se i due mezzi sono diversi ($\theta^t \neq \theta^i$) si può annullare per

$$\theta^i + \theta^t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta^t = \frac{\pi}{2} - \theta^i$$

Incidenza obliqua - 10 (θ^t reale, pol. vert.)

Il coefficiente di riflessione si può annullare per:

$$\boxed{\theta^t = \frac{\pi}{2} - \theta^i}$$

Era (legge di Snell):

$$\boxed{\sin\theta^t = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\sin\theta^i} \Rightarrow \boxed{\frac{\sin\theta^i}{\sin\theta^t} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}}}$$

$$\boxed{\frac{\sin\theta^i}{\cos\theta^i} = \tan\theta^i = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}} \cong \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}} \Rightarrow \boxed{\theta^i = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$$

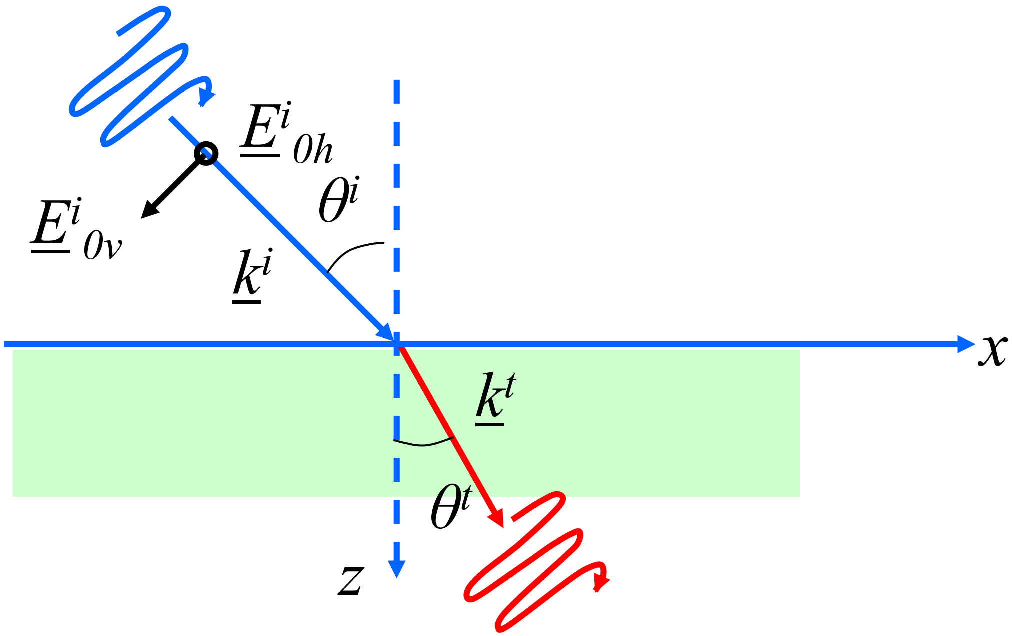
Angolo di Brewster

Incidenza obliqua - 11 (θ^t reale, pol. vert.)

polarizzazione verticale

$$\underline{H}^i{}_{0v} = H^i{}_{0v}\,\underline{y}_0$$

$$\theta_B^i = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$



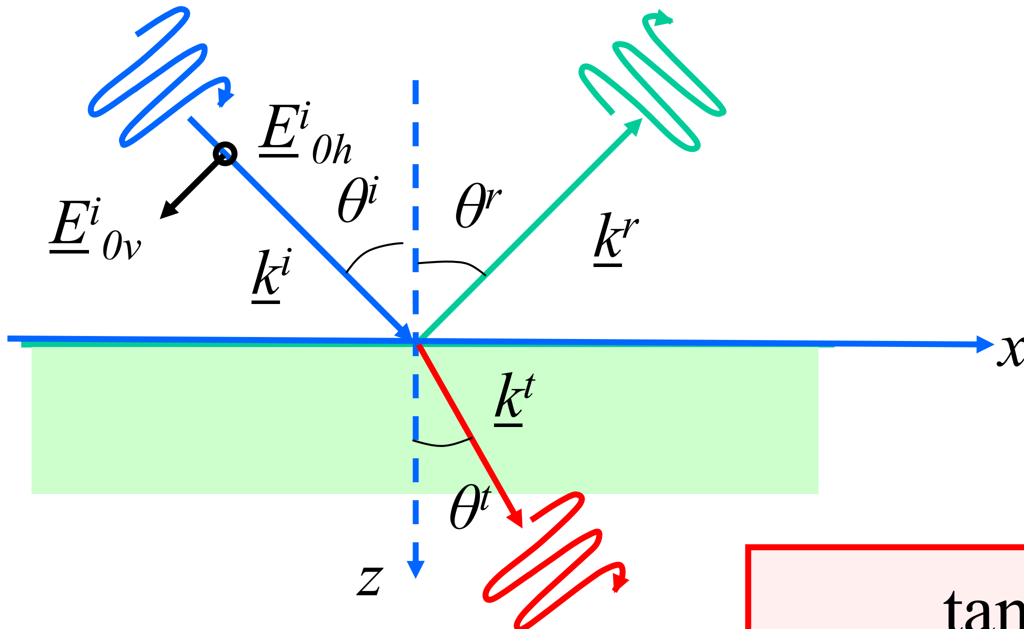
Angolo di Brewster o di polarizzazione

Incidenza obliqua - 12 (θ^t reale)

polarizzazione orizzontale

$$\underline{E}^i{}_{0h} = E^i{}_{0h}\,\underline{y}_0$$

$$S_E = \frac{\sin\left(\theta^t - \theta^i\right)}{\sin\left(\theta^t + \theta^i\right)}$$



$$S_{E_v} = \frac{\tan\left(\theta^i - \theta^t\right)}{\tan\left(\theta^i + \theta^t\right)}$$

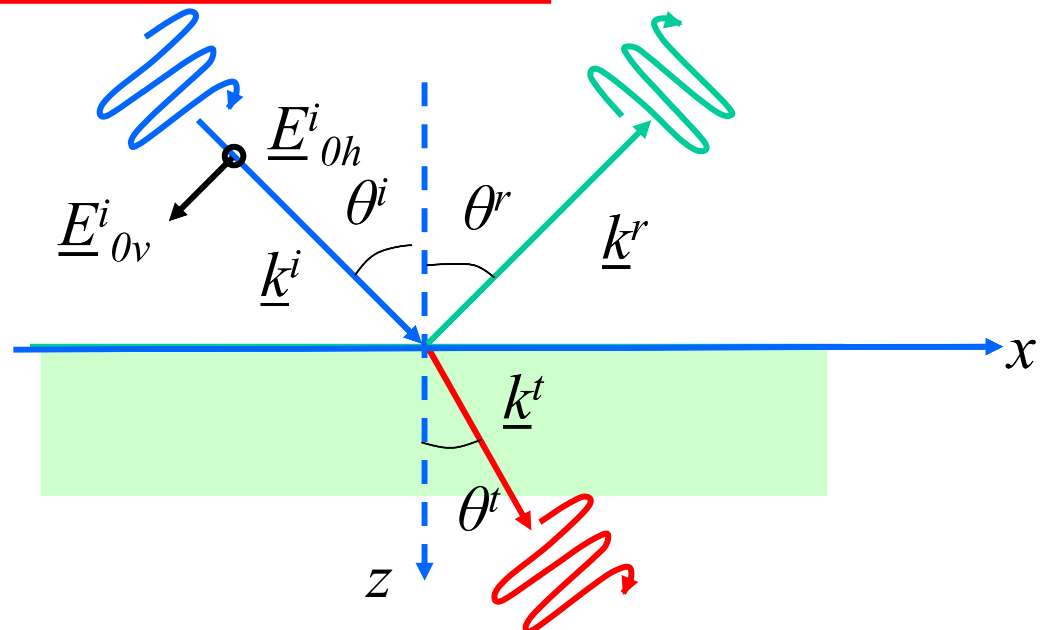
polarizzazione verticale

$$\underline{H}^i{}_{0v} = H^i{}_{0v}\,\underline{y}_0$$

$$\theta^i_B = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Incidenza obliqua - 13

$$\boxed{\sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\sin\left(\theta^i\right)\leq 1 \quad \Rightarrow \quad \theta^t \ reale}$$



E' sicuramente soddisfatta se:

$\mu_1\varepsilon_1 < \mu_2\varepsilon_2$

se: $\mu_1\varepsilon_1 > \mu_2\varepsilon_2$ (il primo mezzo è più denso del secondo) allora, esisterà un angolo θ_L tale che:

$$\boxed{\sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\sin\theta_L^i = 1}$$

$$\boxed{\sin\left(\theta^t\right)=\sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\sin\left(\theta^i\right)}$$

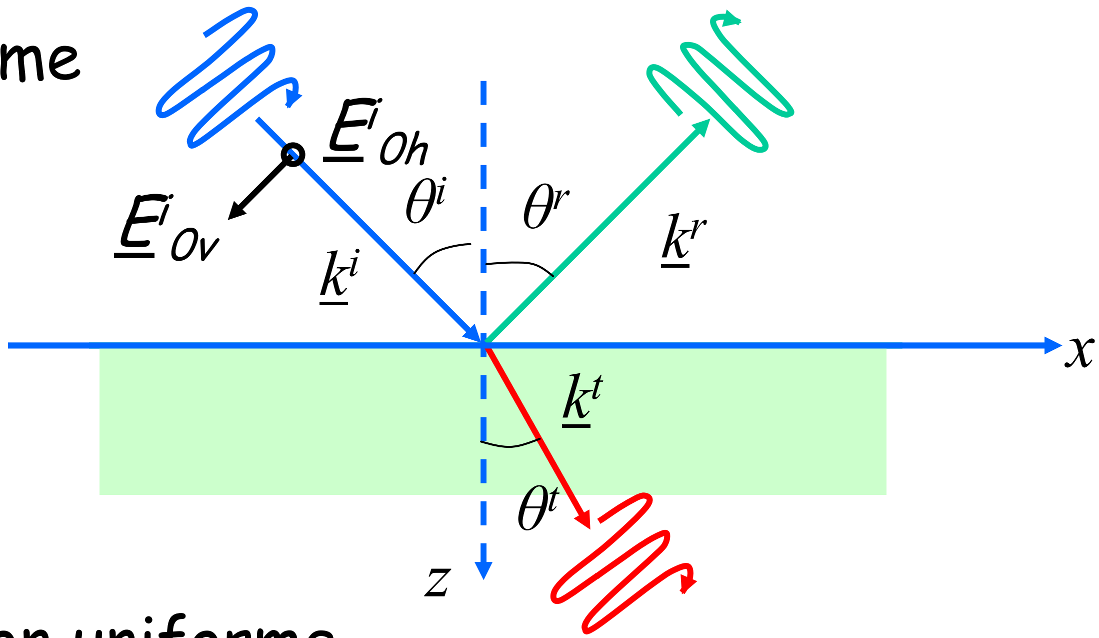
per $\theta>\theta_L$ non ammetterà soluzioni reali

Incidenza obliqua - 14 (θ^t complesso)

per $\theta > \theta_L$ non è verificata l'ipotesi di onda trasmessa uniforme

incide piana uniforme

$\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1 = 0$



trasmessa piana non uniforme

$\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2 = 0$

$$\underline{k}^t = \underline{\beta}^t - j\underline{\alpha}^t \quad \Rightarrow \quad \underline{\beta}^t \cdot \underline{\alpha}^t = 0$$

Incidenza obliqua - 15 (θ^t complesso)

$$\boxed{\underline{z}_0 \times \left[\underline{E}^t - \left(\underline{E}^i + \underline{E}^r\right)\right] = 0}$$

$$\boxed{\underline{z}_0 \times \left[\underline{E}^t_0 e^{-j\left(k^t_x x + k^t_y y\right)} - \left(\underline{E}^i_0 e^{-j\left(k^i_x x\right)} + \underline{E}^r_0 e^{-j\left(k^r_x x + k^r_y y\right)}\right)\right] = 0}$$

$$k^t_x = k^i_x \quad \Rightarrow \quad \beta^t_x = k_1 \sin\theta^i ; \alpha_x = 0$$

$$k^t_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta^t_y = 0; \alpha_y = 0$$

$$\boxed{\underline{\alpha}^t = \alpha^t \underline{z}_0}$$

$\underline{\alpha}$ (ortogonale a $\underline{\beta}$) deve essere diretto come z

Incidenza obliqua - 16 (θ^t complesso)

Si può studiare con le stesse formule (***coefficienti di riflessione***) del caso θ^t reale ma considerando l'angolo θ^t complesso

Si vede che:

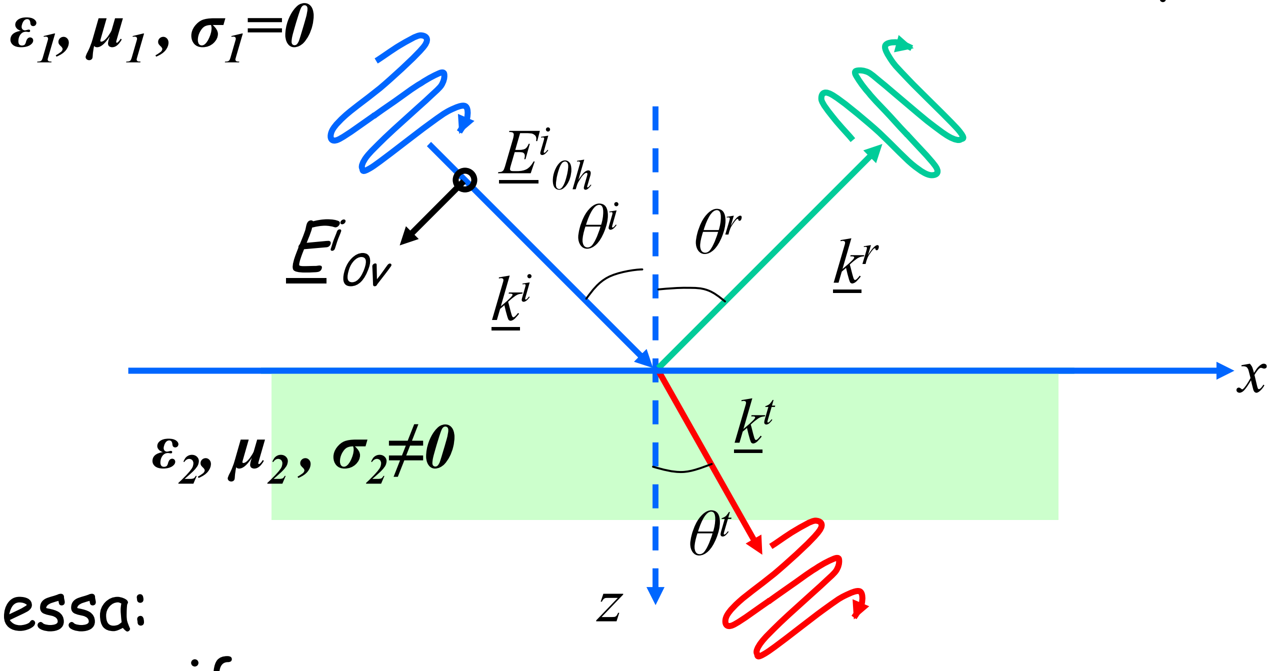
- Modulo coefficiente di riflessione pari a 1:
  riflessione totale
- onda incidente eccita nel secondo mezzo un'onda che si propaga lungo l'interfaccia ($\underline{\beta}=\beta\underline{x}_0$) e si attenua in direzione ortogonale ($\underline{\alpha}=\alpha\,\underline{z}_0$):
  onda superficiale

Incidenza obliqua - 17 (2 buon cond.)

Si considera ora la superficie di separazione tra due mezzi di cui il secondo è un buon conduttore (σ_2 non nullo)

incide piana uniforme

riflessa piana uniforme



trasmessa:
piana non uniforme

$$\underline{k}^t = \underline{\beta}^t - j\underline{\alpha}^t \quad \Rightarrow \quad \beta^t_x \neq 0; \quad \underline{\alpha}^t = \alpha^t \underline{z}_0$$

Incidenza obliqua - 18 (2 buon cond.)

Dalla condizione di separabilità e dalla condizione al contorno:

$$\begin{cases} {\beta^t}^2 - {\alpha^t}^2 = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \\ \beta^t \alpha^t \cos\theta_\beta^t = \dfrac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2} \\ \beta^t \sin\theta_\beta^t = k_1 \sin\theta^i \end{cases}$$

$$\boxed{\beta^t > \alpha^t}$$

$$\boxed{\beta^t \alpha^t \cos\theta_\beta^t < \beta^t \alpha^t < {\beta^t}^2}$$

$$\boxed{\beta^t > \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2}}}$$

Incidenza obliqua - 19 (2 buon cond.)

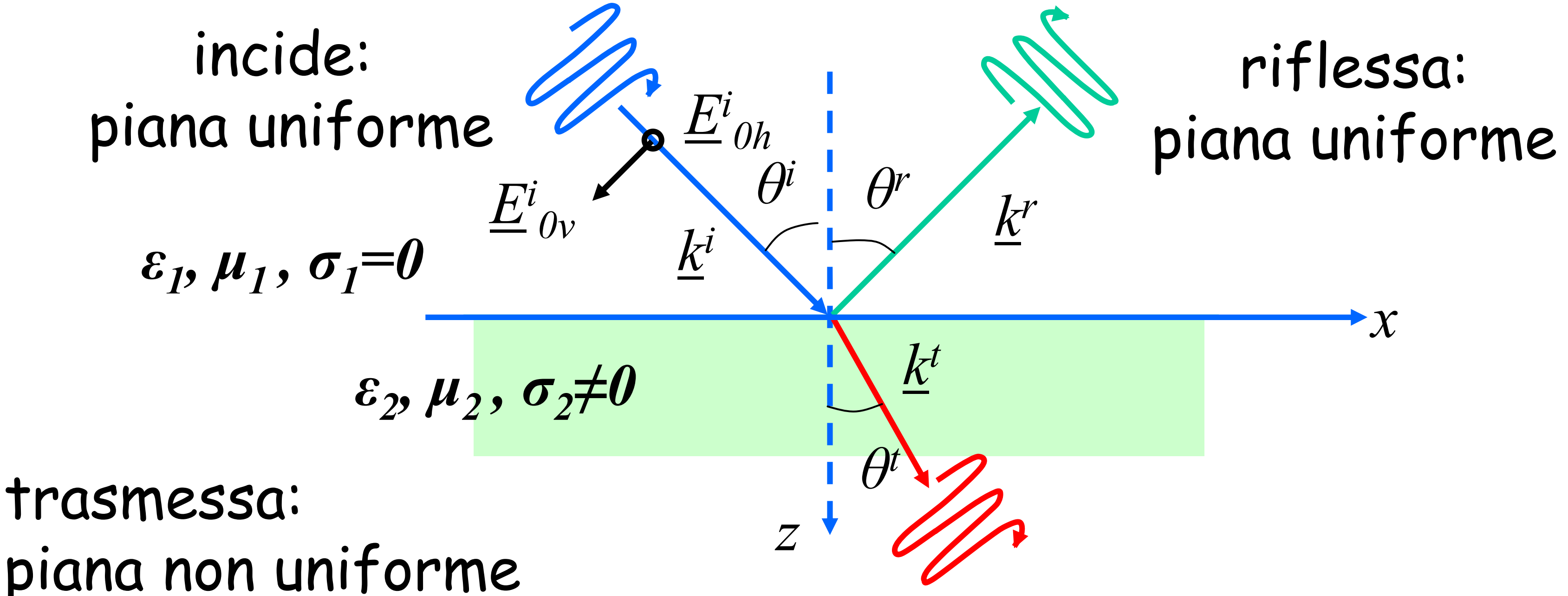
$$\begin{cases} {\beta^t}^2 - {\alpha^t}^2 = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \\ \beta^t \alpha^t \cos\theta^t_\beta = \dfrac{\omega\mu_2\sigma_2}{2} \\ \beta^t \sin\theta^t_\beta = k_1 \sin\theta^i \end{cases}$$

$$\beta^t > \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}$$

$$\sin\theta^t_\beta = \frac{k_1 \sin\theta^i}{\beta^t} < \frac{\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}{\sqrt{\dfrac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}}\sin\theta^i = \sqrt{\frac{2\omega\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\sigma_2}}\sin\theta^i$$

$$\sin\theta^t_\beta \cong \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_1}{\sigma_2}}\sin\theta^i << 1 \Longrightarrow \boxed{\theta^t_\beta \cong 0}$$

Incidenza obliqua - 20 (2 buon cond.)



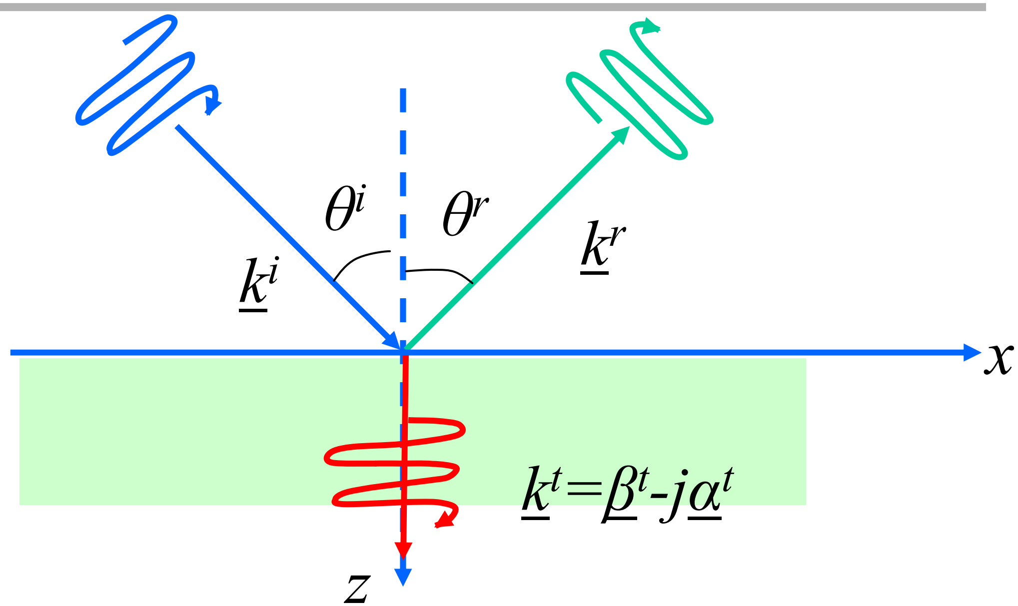
$$\underline{k}^t = \underline{\beta}^t - j\underline{\alpha}^t \quad \Rightarrow \quad \beta^t_x \neq 0; \quad \underline{\alpha}^t = \alpha^t \underline{z}_0$$

$$\boxed{\theta^t_\beta \cong 0} \qquad \boxed{\underline{\beta}^t \cong \beta^t \underline{z}_0}$$

l'onda trasmessa si può considerare piana uniforme indipendentemente dall'angolo di incidenza

Incidenza obliqua - 21 (2 buon cond.)

L'onda trasmessa è piana uniforme, pertanto, $\underline{E}$ sarà tangente alla superficie di separazione dei due mezzi.....



Allora, nel secondo mezzo, per $z=0$....

$=\underline{z}_0$

$$\underline{E}_\tau^+ = \zeta_2\left(\underline{H}_\tau^+ \times \underline{n}\right)$$

$$\underline{E}_\tau^- = \zeta_2\left(\underline{H}_\tau^- \times \underline{n}\right)$$

$$\zeta_2 = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\sigma_2}}$$

Condizione di Leontovich

Riassumendo

- Onda piana uniforme che incide normalmente alla superficie di separazione tra due mezzi non conduttori:

$$\boxed{S_E = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1}}$$

- se il secondo mezzo è un buon conduttore:

$$\boxed{S_E = -1} \qquad \boxed{\underline{J}_S = 2H_0^i \, \underline{x}_0 = 2\frac{E_0^i}{\zeta_1}\underline{x}_0}$$

Riassumendo

- Onda piana uniforme che incide obliquamente alla superficie di separazione tra due mezzi non conduttori:

$$\theta^i = \theta^r$$

$$\sin\left(\theta^t\right) = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\sin\left(\theta^i\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\sin\theta_L^i = 1\right)$$

- polarizzazione orizzontale:

$$S_{E_h} = \frac{\sin\left(\theta^t - \theta^i\right)}{\sin\left(\theta^t + \theta^i\right)}$$

- polarizzazione verticale:

$$S_{E_v} = \frac{\tan\left(\theta^i - \theta^t\right)}{\tan\left(\theta^i + \theta^t\right)}$$

$$\theta_B^i = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

- se il secondo mezzo è un buon conduttore:

l'onda trasmessa si può considerare piana uniforme indipendentemente dall'angolo di incidenza

$$\underline{E}_\tau^- = \zeta_2\left(\underline{H}_\tau^- \times \underline{n}\right)$$

$$\zeta_2 = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\sigma_2}}$$