Propagazione dei campi elettromagnetici nei tessuti biologici

Marta Cavagnaro

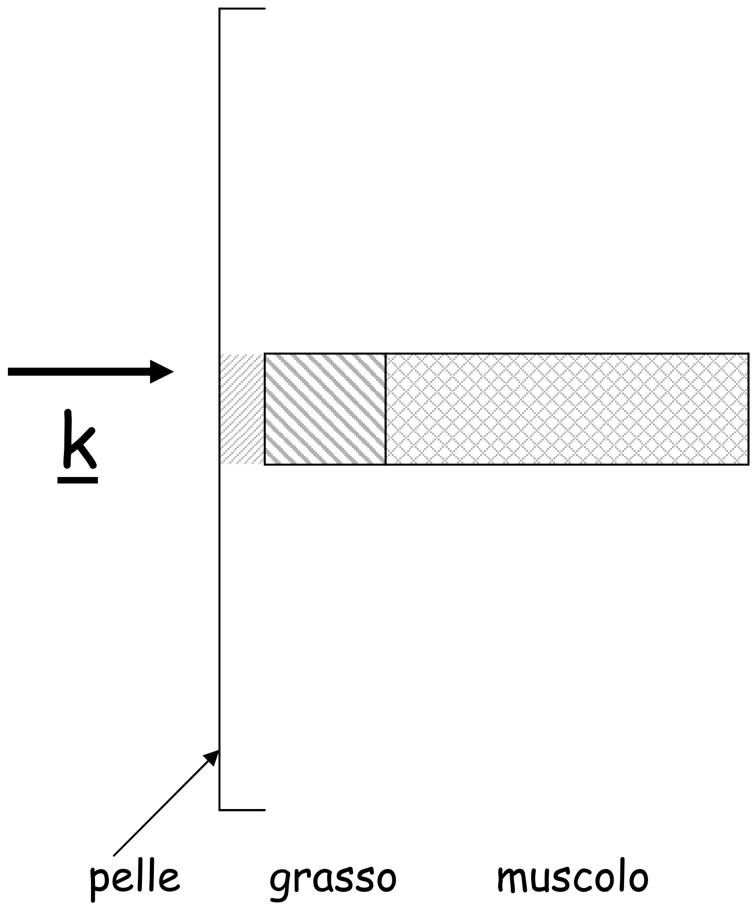
Studio antenne entro o vicino corpo umano

- Several methods for analyzing antenna arrays for medical applications exist.
- For simple cases where the biological structure can be approximated as uniform or by very simple models such as layers or cylinders, classical methods such as analytical analysis or method of moments can be used. If the structure of the body varies so much that anatomically precise modeling is rendered imprecise by variation between individuals, these simple analyses can be used to determine an optimal array design for the range of expected variation between individuals. An example of this was done in Hadley for design of coils for vascular MRI. Another example in which the body can be modeled as near-uniform is in the case of arrays for hyperthermia of the brain.
- Method of moments with a simple pulsed basis function (which is the most numerically efficient form) has limitations for heterogeneous models, however, higher-order basis functions can overcome this limitation, although the computational complexity is significantly increased. In addition, the method of moments is very computationally expensive when heterogeneous models are evaluated.
- A more efficient method for calculation of heterogeneous objects is the finite difference time domain (FDTD) method, which has led to its tremendous popularity for numerical bioelectromagnetic calculations. For example, a interstitial array of hyperthermia applicators simulated using method of moments was simulated with a fraction of the computational resources using FDTD. Several individual hyperthermia applicators have been simulated using FDTD.

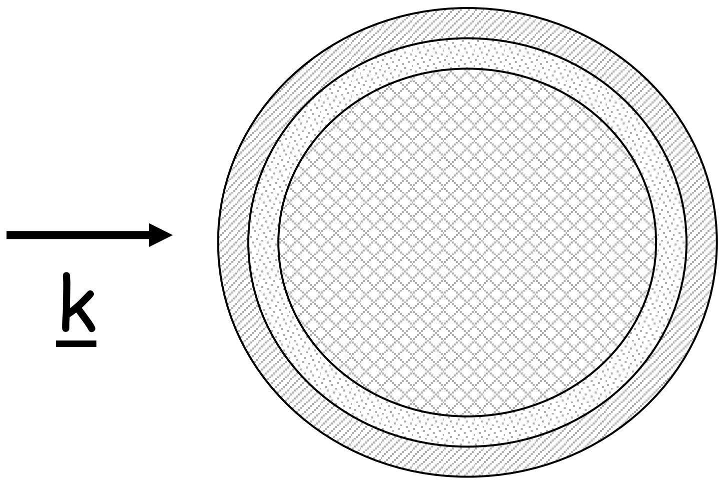
C. Furse, Antennas for Medical Applications, cap 38, Volakis ed., Antennas Eng. Handbook, 2007, McGraw-Hill

Modelli per il calcolo dell'assorbimento

Onda piana che incide su un mezzo multistrato

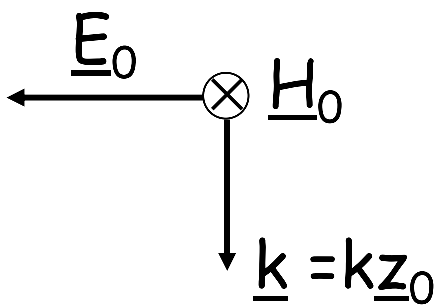


Corpo umano



Testa

Onde piane uniformi (TEM)



Il campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}_0$ ed il campo magnetico $\underline{\mathbf{H}}_0$ sono perpendicolari fra di loro e perpendicolari alla direzione di propagazione $\underline{k}$ (TEM)

La costante di propagazione è complessa:

$$\underline{k} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha}$$

$dove:$

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = \omega^2 \mu \varepsilon_c$$

Condizione di separabilità

Si ha: $\underline{\mathbf{E}}_0 = \zeta \underline{\mathbf{H}}_0 \times \underline{z}_0$

L'impedenza d'onda è: $\zeta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_c}}$

$$\underline{E}(\underline{r}, \omega) = \underline{E}_0 e^{-\underline{\alpha} \cdot \underline{r}} e^{-j\, \underline{\beta} \cdot \underline{r}}$$

Propagazione onde piane in un mezzo omogeneo

$$\underline{E}(\underline{r},\omega) = \underline{E}_0 e^{-\underline{\alpha}\cdot\underline{r}} e^{-j\underline{\beta}\cdot\underline{r}}$$

ampiezza + polarizzazione **fase**

- La propagazione dell'onda è caratterizzata ***LUNGO LA DIREZIONE DI r*** dalla costante di attenuazione α, legata alle caratteristiche del mezzo, e dalla costante di fase β.
- In generale, risulta:

$$\underline{k} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c = \omega^2 \mu \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right)$$

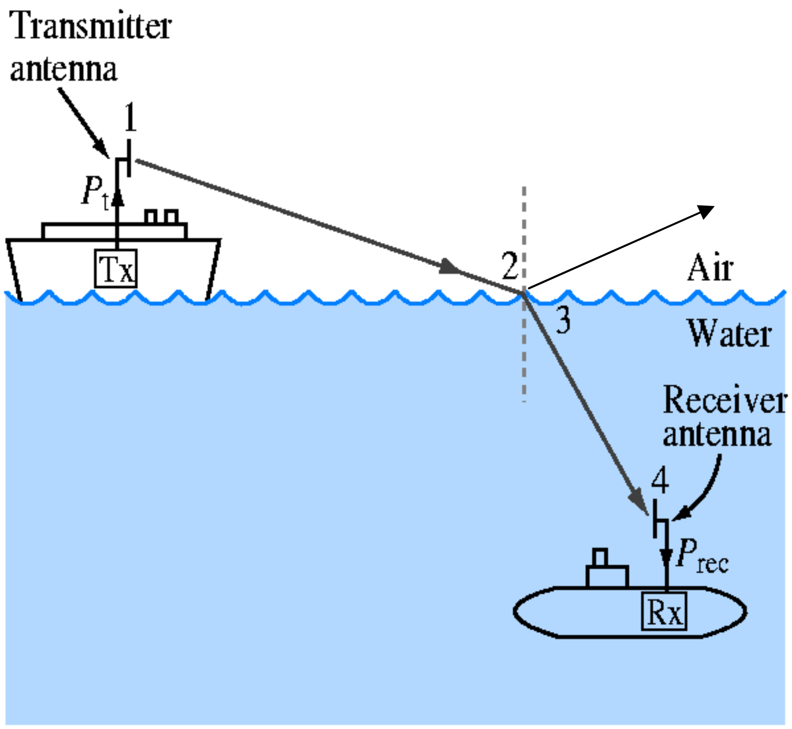
- La velocità di fase, velocità di un ipotetico osservatore per non vedere variazioni di fase dell'onda, è data da:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

Propagazione onda piana

- Quando un'onda piana incide alla superficie di separazione tra due mezzi con caratteristiche elettromagnetiche diverse, nascono due onde: una **riflessa** che si propaga nel primo mezzo (da cui proveniva l'onda) ed una **trasmessa (rifratta)** nel secondo mezzo.

- L'onda riflessa e trasmessa si possono calcolare a partire dall'onda incidente e dalle condizioni al contorno che devono essere soddisfatte dal campo elettromagnetico alla superficie di separazione di due mezzi.

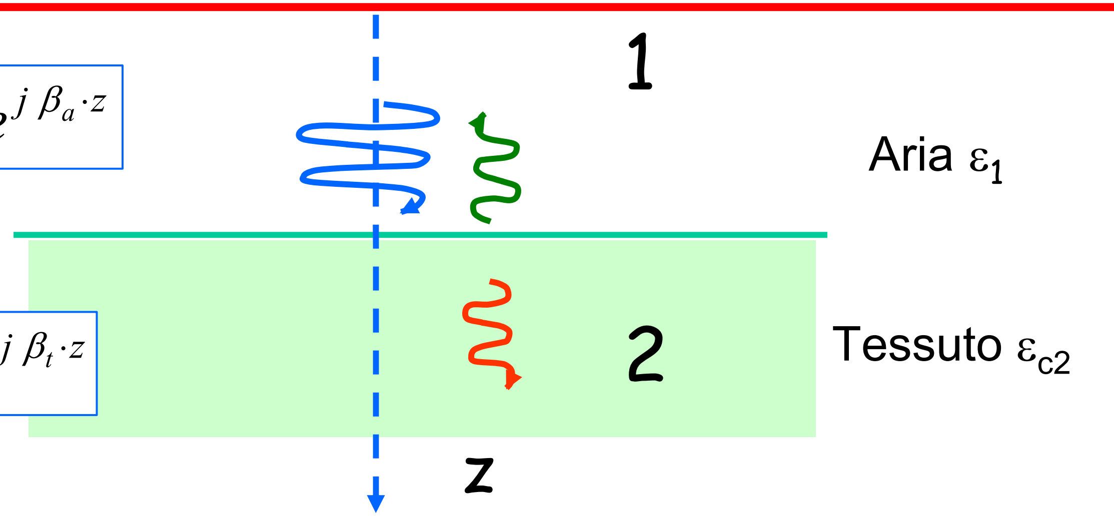


- Il **campo totale** nel primo mezzo sarà dato dalla somma dell'onda incidente con l'onda riflessa.

Incidenza normale

Consideriamo un'onda piana ed uniforme che proviene dall'aria e incide su di un tessuto biologico omogeneo che occupa un intero semispazio.
L'onda <u>incidente</u> in parte è <u>trasmessa</u> nel tessuto, nel quale si propaga attenuandosi, ed in parte viene <u>riflessa</u>

$$\underline{E}_{aria}(\underline{r},\omega) = \underline{E}_0^+ e^{-j\beta_a \cdot z} + \underline{E}_0^- e^{j\beta_a \cdot z}$$



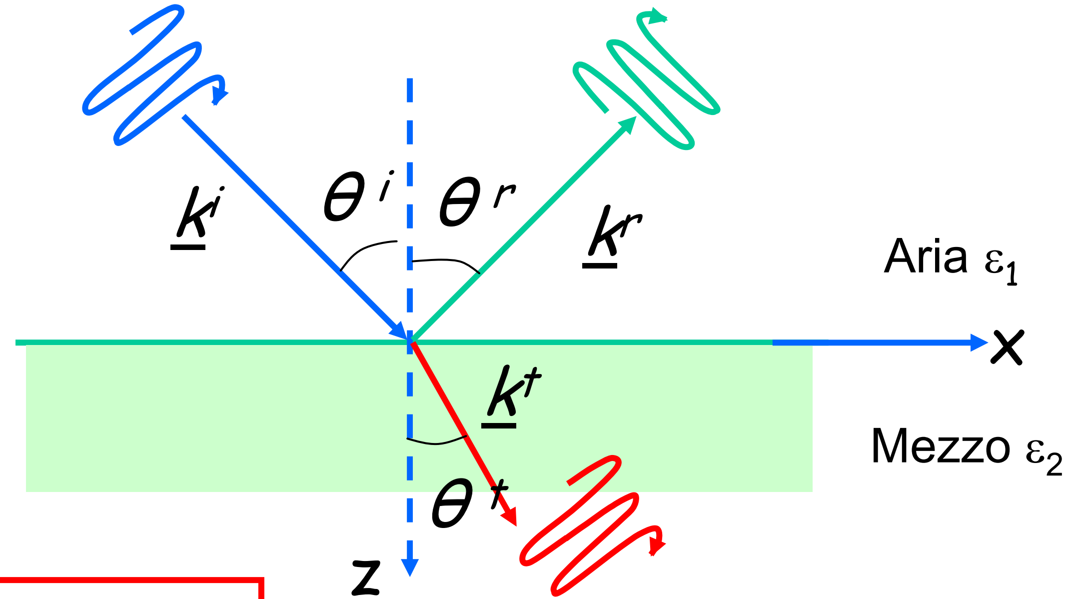
$$\underline{E}_{tessuto}(\underline{r},\omega) = \underline{E}_0^+ e^{-\alpha_t \cdot z} e^{-j\beta_t \cdot z}$$

Coefficiente di riflessione del campo elettrico $S_E = \dfrac{E_0^r}{E_0^i} = \dfrac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1}$

$$T_E = \frac{E_0^t}{E_0^i} = 1 + S_E = 1 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{2\zeta_2}{\zeta_2 + \zeta_1}$$ Coefficiente di trasmissione

Incidenza obliqua

Applicando le condizioni al contorno alla superficie di separazione



$$k_1 \sin\theta^i = k_1 \sin\theta^r \Rightarrow \boxed{\theta^i = \theta^r}$$

Legge della riflessione

$$k_1 \sin\theta^i = k_2 \sin\theta^t \Rightarrow \boxed{\sin\theta^t = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\sin\theta^i}$$

Legge di Snell
o della rifrazione

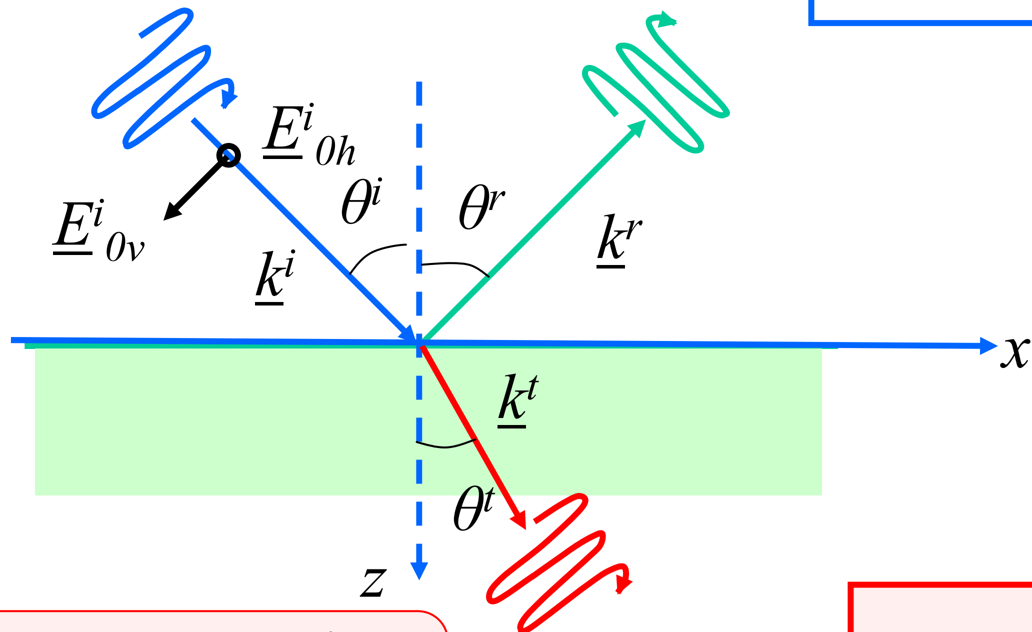
nota bene… $\sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}\sin\left(\theta^i\right) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \theta^t \ reale$

Incidenza obliqua - 2

polarizzazione orizzontale

$$\underline{E}^i{}_{0h} = E^i{}_{0h}\,\underline{y}_0$$

$$S_E = \frac{\sin\left(\theta^t - \theta^i\right)}{\sin\left(\theta^t + \theta^i\right)}$$



polarizzazione verticale

$$\underline{H}^i{}_{0v} = H^i{}_{0v}\,\underline{y}_0$$

$$S_{E_v} = \frac{\tan\left(\theta^i - \theta^t\right)}{\tan\left(\theta^i + \theta^t\right)}$$

$$\theta^i_B = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Angolo di Brewster (non c'è onda riflessa)

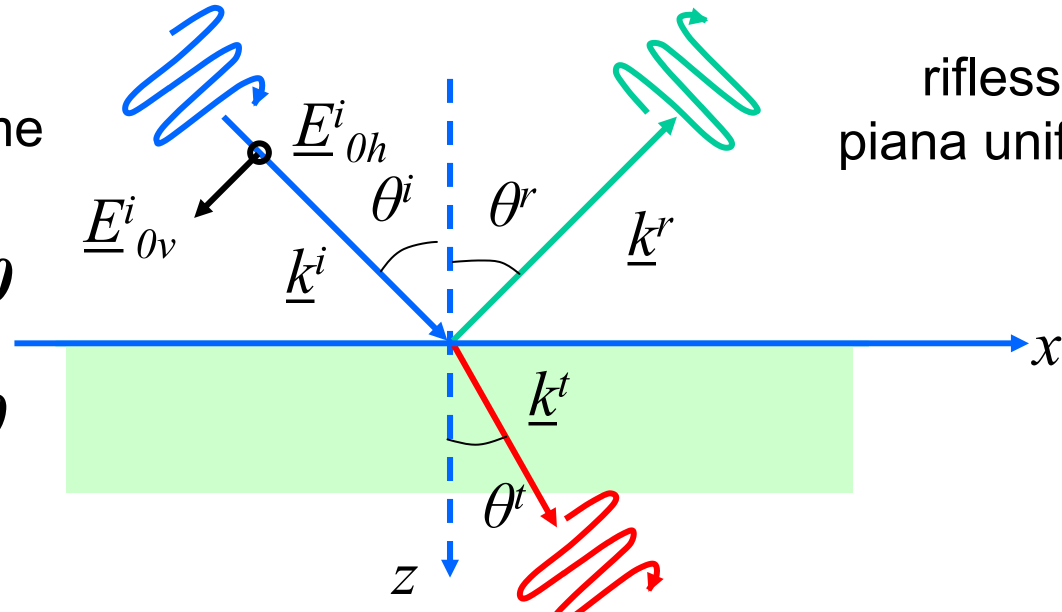
Incidenza obliqua – 2° mezzo buon conduttore

incide:
piana uniforme

riflessa:
piana uniforme

$\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1 = 0$

$\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2 \neq 0$



trasmessa:
piana non uniforme

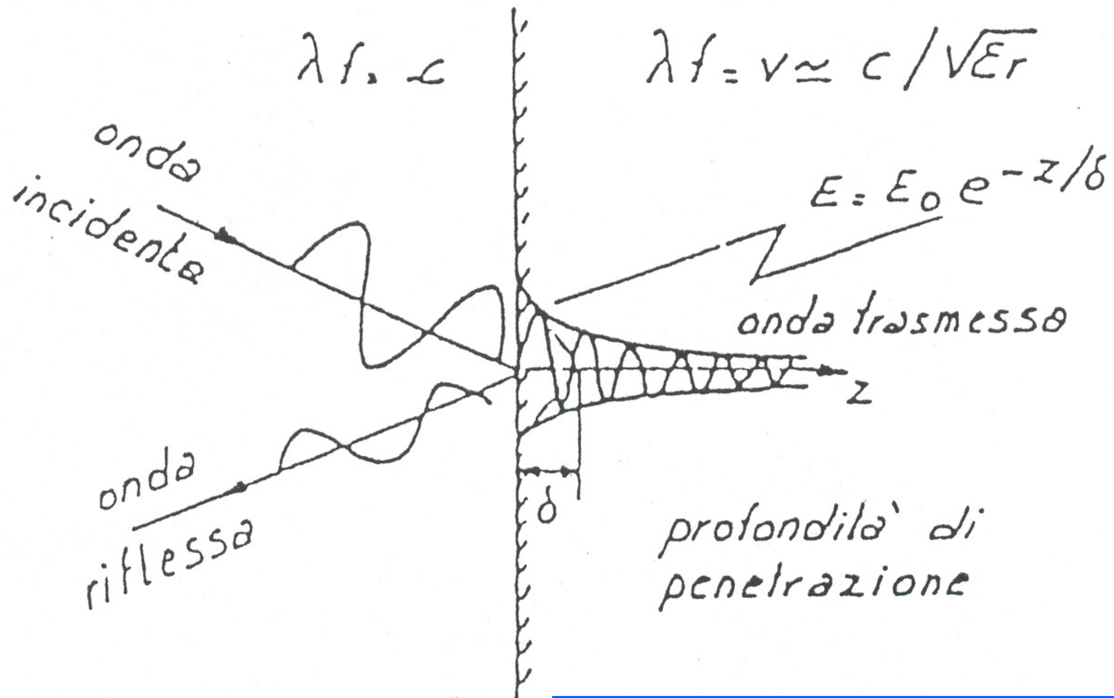
$$\underline{k}^t = \underline{\beta}^t - j\underline{\alpha}^t \quad \Rightarrow \quad \beta^t_x \neq 0; \quad \underline{\alpha}^t = \alpha^t \underline{z}_0$$

$\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2 \neq 0$ *e elevato* si trova....

$$\boxed{\theta^t_\beta \simeq 0} \qquad \boxed{\underline{\beta}^t \simeq \beta^t \underline{z}_0}$$

l'onda trasmessa si può considerare piana uniforme (si propaga lungo z) indipendentemente dall'angolo di incidenza

Incidenza obliqua – 2° mezzo buon conduttore



$$\underline{E}_{tessuto}(\underline{r},\omega)=\underline{E}_0^{+}e^{-\alpha_t \cdot z}e^{-j\,\beta_t \cdot z}$$

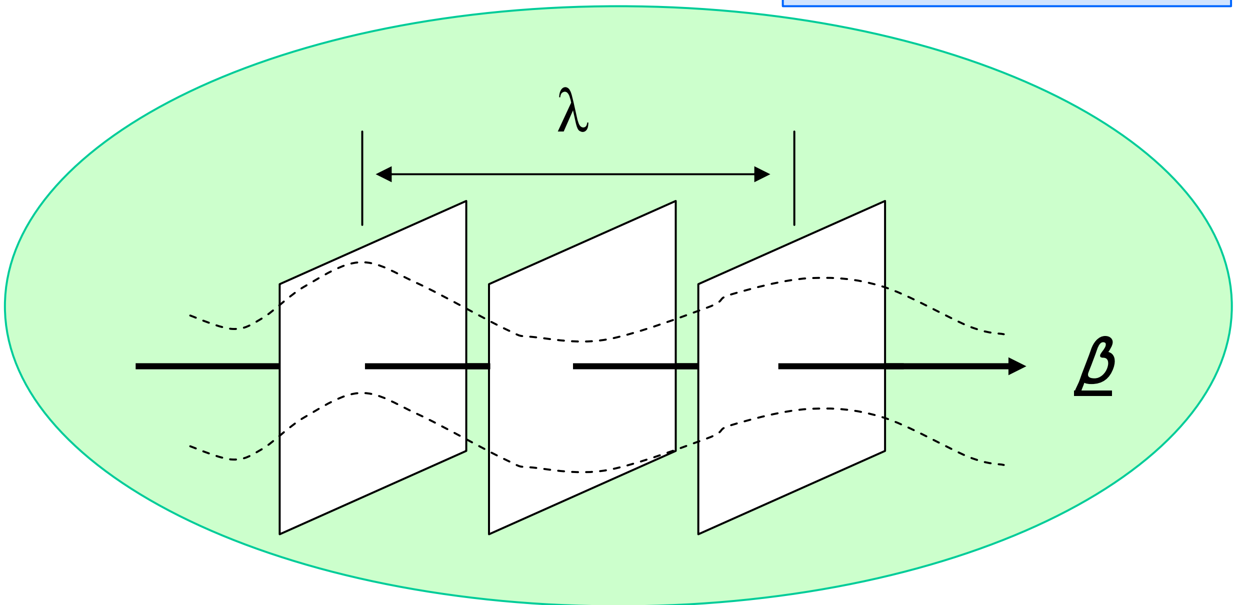
Lunghezza d'onda

Si definisce lunghezza d'onda λ la distanza tra due punti fra i quali esiste una differenza di fase pari a 2π

Lungo la direzione di $\underline{\beta}$:

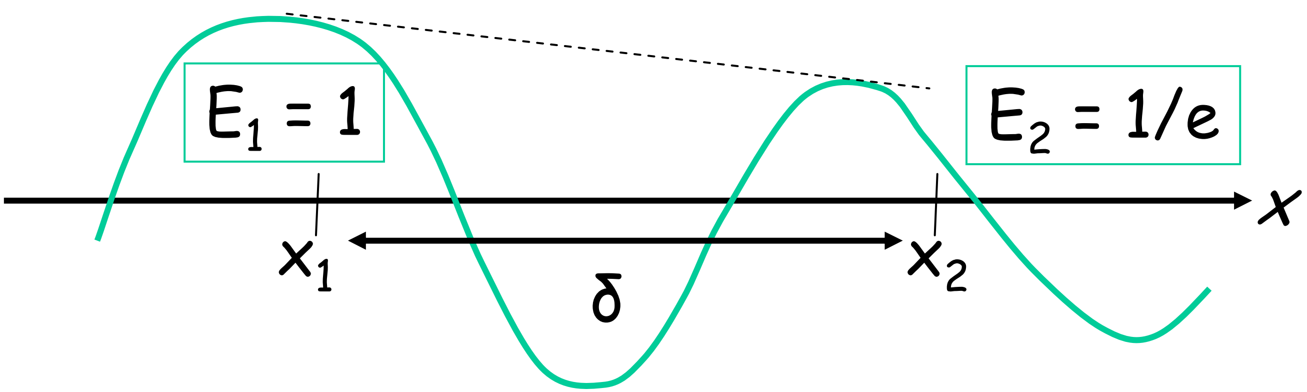
$$\boxed{\beta\, r_2 - \beta\, r_1 = 2\pi}$$

$$\boxed{\lambda = r_2 - r_1 = \frac{2\pi}{\beta}}$$



Profondità di penetrazione

La ***profondità di penetrazione*** è definita come la distanza alla quale l'onda si è attenuata di 1/e (~1/3)



$$\underline{E}_{tessuto}(\underline{r},\omega) = \underline{E}_0^+ e^{-\alpha_t \cdot z} e^{-j\beta_t \cdot z}$$

$$\frac{1}{e} = e^{-\alpha\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{\alpha}$$

Potenza trasportata

La potenza trasportata si calcola dal flusso del **vettore di Poynting** attraverso una superficie

$$\boxed{\underline{S}(\underline{r},\omega)=\frac{1}{2}\underline{E}(\underline{r},\omega)\times\underline{H}^{*}(\underline{r},\omega)}$$

il modulo della parte reale di questo vettore rappresenta la potenza trasportata dall'onda per unità di superficie (densità di potenza)

$$S=\left|\mathrm{Re}\left\{\underline{S}\right\}\right| \quad \left[W/m^{2}\right]$$

Potenza trasportata

Per l'onda trasmessa che propaga nel verso delle z positive si ha:

$$\boxed{\underline{E}_{tessuto}(\underline{r},\omega) = E_0^+ \underline{x}_0 e^{-\alpha_t \cdot z} e^{-j\beta_t \cdot z}}$$

$$\boxed{\underline{H}_{tessuto}(\underline{r},\omega) = H_0^+ \underline{y}_0 e^{-\alpha_t \cdot z} e^{-j\beta_t \cdot z}}$$

$$\boxed{\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2}\underline{E}_0^+ \underline{H}_0^{+*} e^{-2\alpha_t z} \underline{x}_0 \times \underline{y}_0}$$

SAR (definizione)

Per caratterizzare la cessione di potenza dall'onda al tessuto si utilizza la quantità SAR (Specific Absorption Rate)

Il SAR è definito come il rapporto tra la potenza ceduta dal campo EM ad un volume elementare di tessuto e la massa di tale volume:

$$\boxed{SAR = \frac{\sigma|\underline{\mathbf{E}}|^2}{2\rho} = \frac{\sigma|\underline{\mathbf{E}}|^2_{rms}}{\rho} \quad [W/kg]}$$

dove

$$\frac{\sigma|\underline{\mathbf{E}}|^2}{2} = densità \;\; di \;\; potenza [W/m^3]$$

$$\rho = densità \;\; di \;\; massa [kg/m^3]$$

SAR (medi)

- La quantità SAR sopra definita viene riferita ad un volume di dimensioni infinitamente piccole: è una grandezza funzione di punto
- In molti casi (normative, applicazioni terapeutiche , etc.) è più utile far riferimento a volumi più grandi: si parla di SAR medio sul volume V

$$\boxed{SAR_V = \frac{\int_V \frac{\sigma|\underline{\mathbf{E}}|^2}{2} dV}{\int_V \rho \, dV}}$$

$$SAR_{WB} = \frac{\int_{WB} \frac{\sigma|E|^2}{2} dv}{\int_{WB} \rho \, dv}$$

SAR mediato su tutto il corpo

$$SAR_{10g} = \frac{\int_{10g} \frac{\sigma|E|^2}{2} dv}{\int_{10g} \rho \, dv}$$

SAR mediato su 10 grammi

$$SAR_{1g} = \frac{\int_{1g} \frac{\sigma|E|^2}{2} dv}{\int_{1g} \rho \, dv}$$

SAR mediato su 1 grammo

Lunghezza d'onda e profondità di penetrazione nei tessuti

Si è visto che:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

La lunghezza d'onda è inversamente proporzionale alla costante di fase β, mentre la profondità di penetrazione è inversamente proporzionale alla costante di attenuazione α.
A loro volta, α e β sono legate alle proprietà dielettriche del mezzo dalla condizione si separabilità

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = k^2 = (\underline{\beta} - j\underline{\alpha}) \cdot (\underline{\beta} - j\underline{\alpha}) = \omega^2 \mu \varepsilon_c$$

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon' \\ \underline{\beta} \cdot \underline{\alpha} = \dfrac{\omega \mu \sigma_{eq}}{2} \end{cases}$$

Costante di fase e di attenuazione

Svolgendo i calcoli, si trova

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_0\varepsilon'}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{\sigma_{eq}^2}{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon'^2}}\right)} = \beta_0\sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{\sigma_{eq}^2}{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon'^2}}\right)}$$

$$\beta_0 = \frac{\omega}{c_0}$$

Costante di fase nel vuoto

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_0\varepsilon'}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{\sigma_{eq}^2}{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon'^2}}\right)} = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{\sigma_{eq}^2}{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon'^2}}\right)}$$

Velocità dell'onda nel vuoto

Lunghezza d'onda

Per la lunghezza d'onda si ha quindi

$$\beta = \beta_0 \sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{\sigma_{eq}^2}{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon'^2}}\right)}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$$

Lunghezza d'onda nel vuoto

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta_0} = 2\pi\frac{c_0}{\omega}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{\sigma_{eq}^2}{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon'^2}}\right)}}}$$

In generale diminuisce al crescere della frequenza

Profondità di penetrazione nei tessuti

Per la profondità

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\alpha}}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{\sigma_{eq}^2}{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon'^2}}\right)}$$

$$\boxed{\delta = \frac{c_0}{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{\sigma_{eq}^2}{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon'^2}}\right)}}}$$

In generale diminuisce al crescere della frequenza

Profondità di penetrazione: esempio

Frequenza = 1 GHz

Muscolo: $\sigma_{eq} \sim 1$ S/m; $\varepsilon' \sim 60$

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon' = 2\pi 10^9 \cdot \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \cdot 60 = 3.33 \quad S/m$$

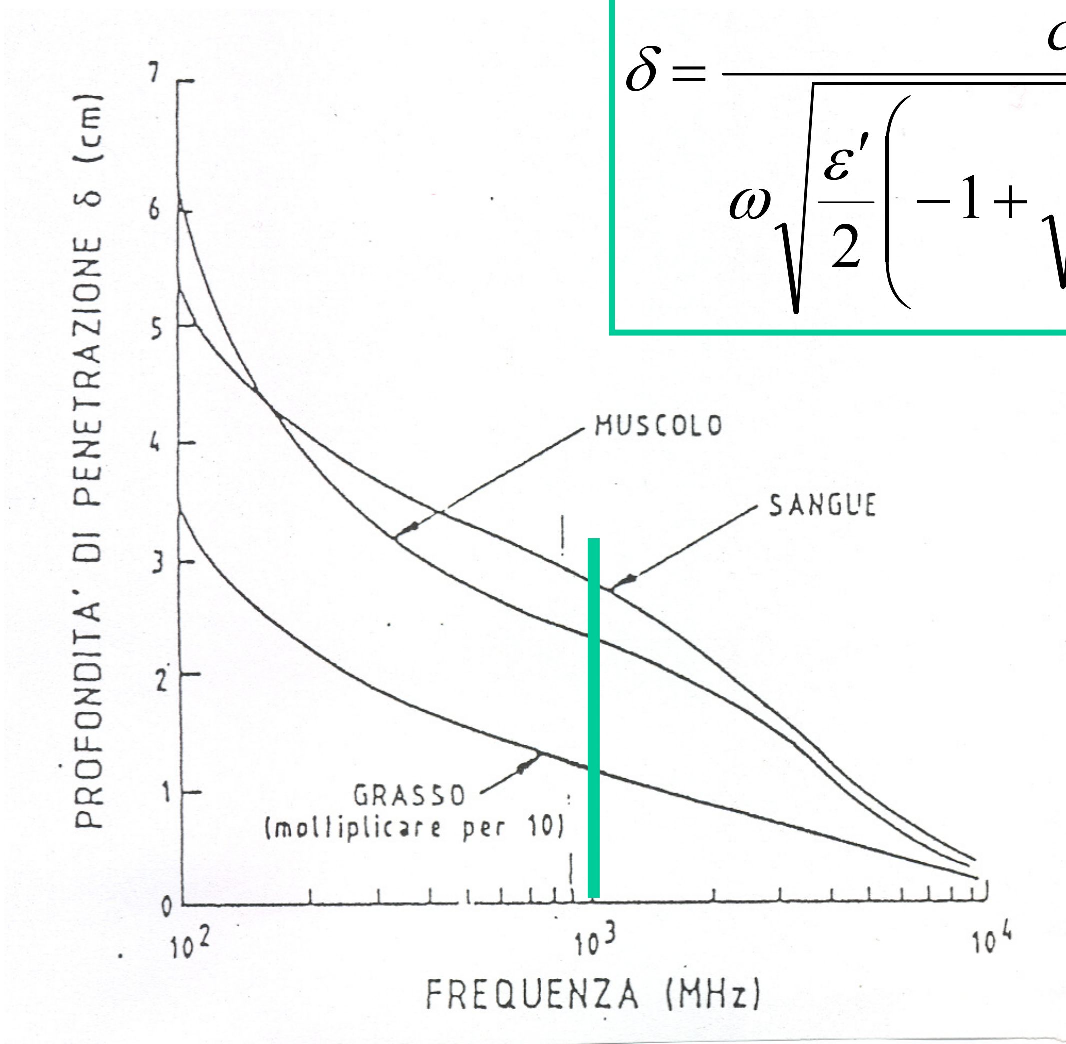
$$\boxed{\delta = \frac{c_0}{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{\sigma_{eq}^2}{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon'^2}}\right)}}}$$

$$\boxed{\delta \cong 0.023\ m = 2.3\ cm}$$

$\varepsilon_0 = (1/36\pi)\ 10^{-9}$ (F/m) $\mu_0 = 4\ \pi\ 10^{-7}$ (H/m) $c_0 = (\varepsilon_0\ \mu_0)^{-1/2} = 3 \cdot 10^8$ (m/s)

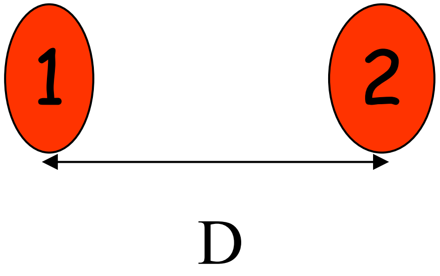
Profondità di penetrazione in alcuni tipi di tessuto biologico

$$\delta = \frac{c_0}{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{\sigma_{eq}^2}{\omega^2\varepsilon_0^2\varepsilon'^2}}\right)}}$$



Risoluzione (potere risolvente)

La Risoluzione definisce la capacità di distinguere due oggetti adiacenti



- Occorre che sia $\lambda \leq$ D

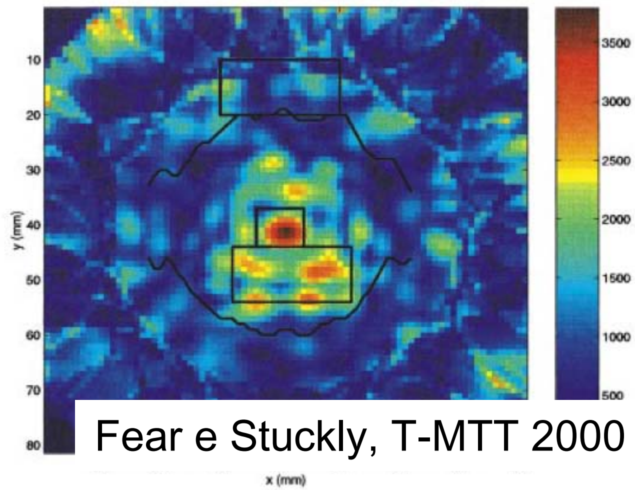
- Se $\lambda \cong$ D Scattering
- Se $\lambda \gg$ D oggetti indistinguibili

Nel visibile $\lambda \cong 0.4 - 0.8\ \mu m$ - nell'aria

Limite di risoluzione del microscopio ottico nell'aria ($\cong 0.4\ \mu m$)

Risoluzione - esempi

- **Alle microonde**
  - $f \cong 1 \div 10$ GHz
  - $\lambda \cong 30 \div 3$ cm
  - $\lambda_t \cong 5 \div 0.5$ cm
  - Risoluzione bassa (Max 5 mm)
  - Energia minore di 10^{-3} eV (non ionizzanti)
    (E = hf -> h = costante di Plank)

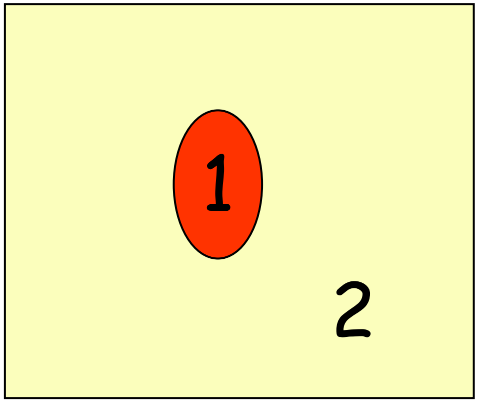


Fear e Stuckly, T-MTT 2000

- **Raggi X**
  - $f \cong 3 \cdot 10^{16} \div 3 \cdot 10^{19}$ -> $\lambda \cong 10 \div 10^{-2}$ nm
  - Alta risoluzione
  - Energia maggiore di 10^{2} eV (ionizzanti)
    (energia di ionizzazione atomi più diffusi $\cong$ 10 eV)

Contrasto

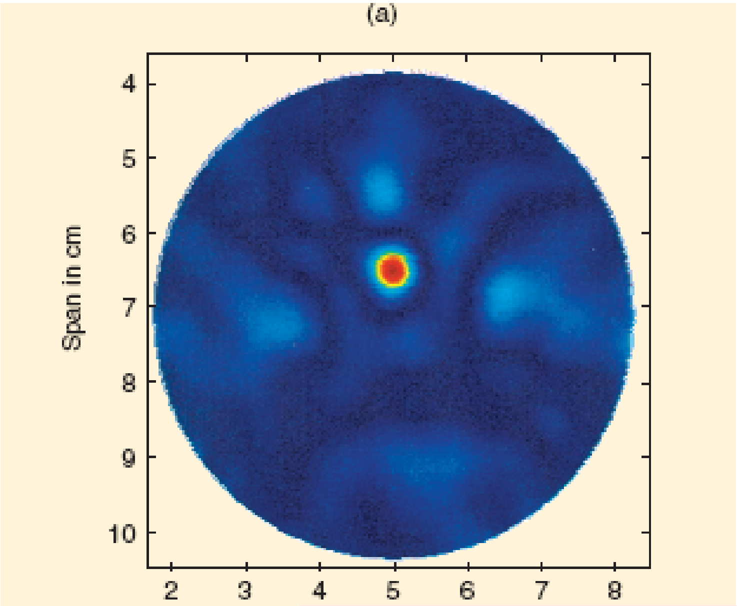
Il contrasto definisce la capacità di distinguere due oggetti sovrapposti



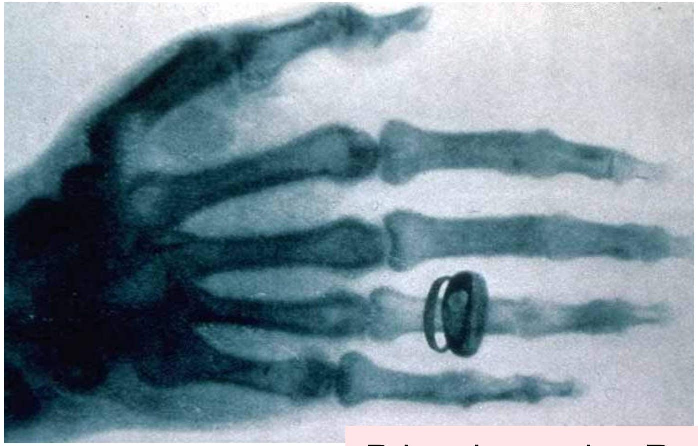
- Il contrasto è legato alle diverse proprietà di assorbimento e riflessione dei due oggetti per la radiazione in esame.
- Nel visibile è legato al colore degli oggetti

Contrasto

- **Alle microonde**
  - $f \cong 1 \div 10$ GHz
  - $\varepsilon' \cong 5 \div 50$
  - $\sigma_{eq} \cong 0.05 \div 10$ S/m
  - Elevato contrasto
- **Raggi X**
  - $\rho \cong 0.33$ kg/dm^3 (polmoni) $\div$ 1.2 kg/dm^3 (osso)
  - Basso contrasto

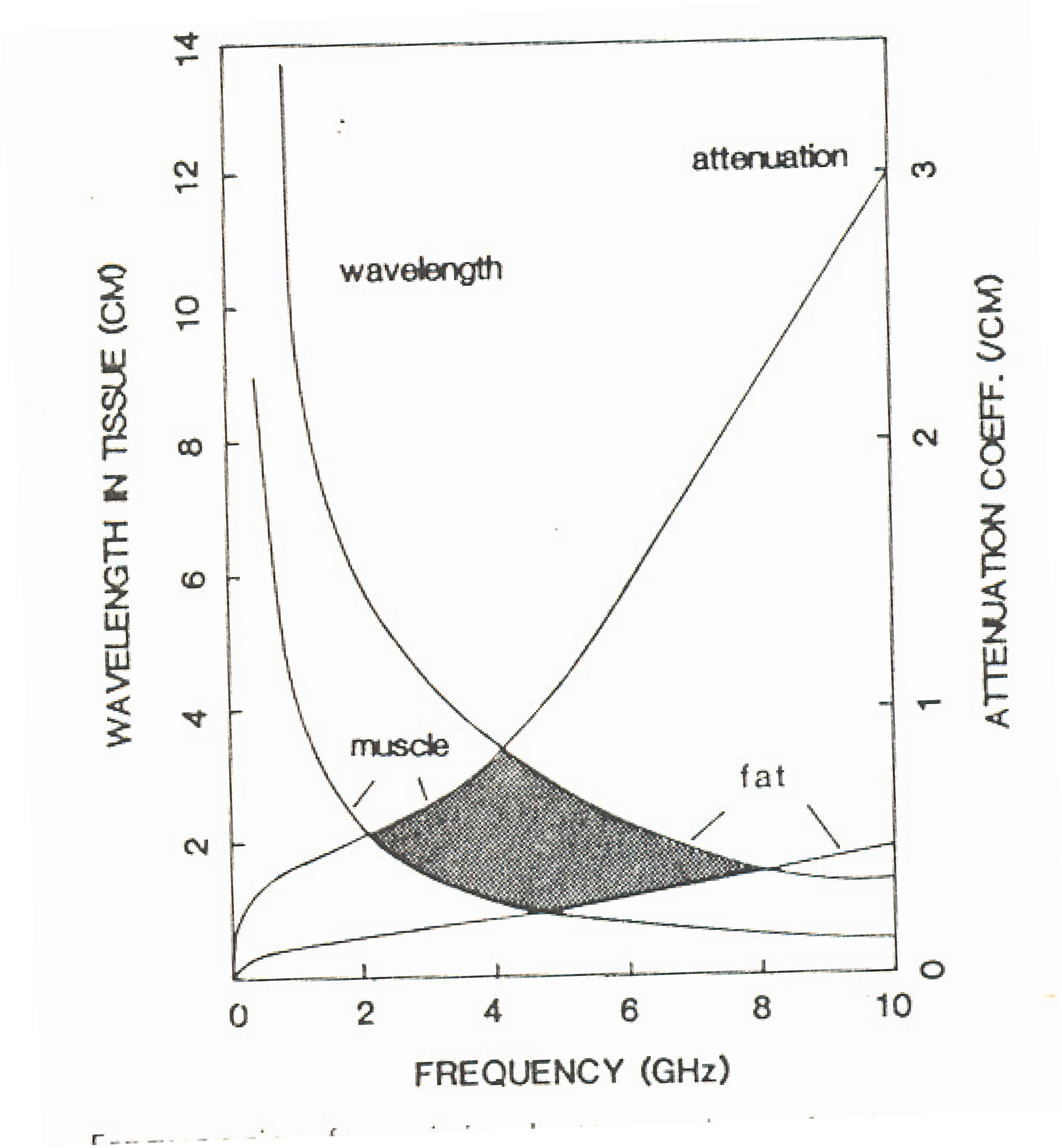


Fear et al., Mw Mag. 2002



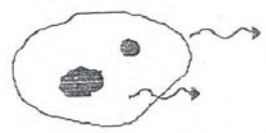
Prima immagine Rx

Microwave Imaging



Al crescere della frequenza i campi EM si attenuano maggiormente (**bassa penetrazione**)
le lunghezze d'onda si riducono quindi si ha **maggiore risoluzione**.
La regione ottimale è quella ombreggiata

Diagnostica per immagini

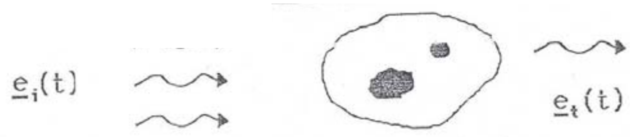


EMISSIONE SPONTANEA

(RADIOMETRIA E TERMOGRAFIA)

TRASMISSIONE

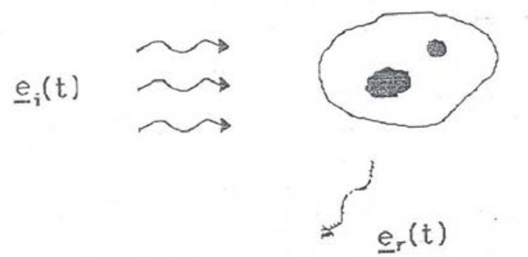
(TOMOGRAFIA)

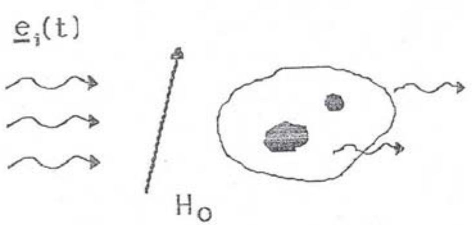


RIFLESSIONE E

SCATTERING

(MICROWAVE IMAGING)





EMISSIONE INDOTTA DA UNA STIMOLAZIONE RF IMPULSIVA

(RMN)