

Capitolo 2

Linee di trasmissione e circuiti

2.1 Introduzione

In questo capitolo viene inizialmente presentata la teoria delle linee di trasmissione finalizzata allo studio della propagazione dei modi TEM nelle strutture guidanti. Di seguito è valutato l'effetto che ha, sulla propagazione, la chiusura della linea su diversi tipi di carichi. Il capitolo si conclude con l'introduzione di alcune rappresentazioni matriciali per circuiti a microonde e con la descrizione della tecnica dei grafi di flusso per lo studio di reti a microonde.

2.2 Teoria delle linee di trasmissione

2.2.a Modo TEM nelle strutture guidanti

Una linea di trasmissione è una struttura in grado di guidare l'energia elettromagnetica. Un tipico esempio è costituito dal cavo coassiale la cui sezione è riportata in Fig. 2.1. Nella figura, r e θ sono le coordinate trasverse e z (non indicata) è la coordinata longitudinale (coordinate cilindriche).

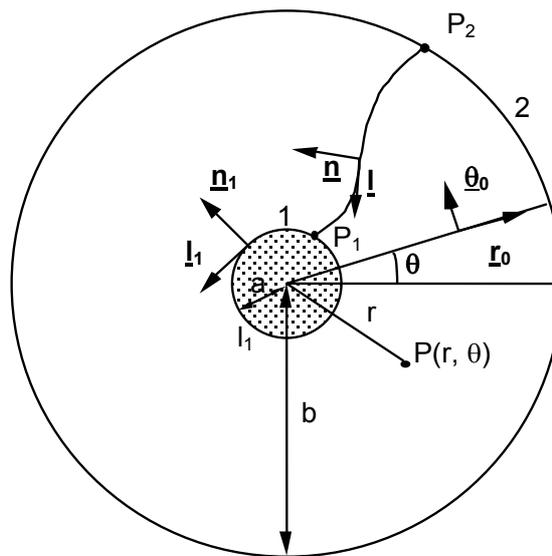


Fig. 2.1

Nel cavo coassiale può propagare un modo trasverso elettromagnetico (TEM) per il quale sono diverse da zero le sole componenti trasversali del campo. Queste componenti possono essere espresse come (*) :

$$\underline{\mathbf{E}}_t(r, \theta, z) = \underline{\mathbf{e}}_t(r, \theta) (P_1 e^{-k_z z} + P_2 e^{k_z z}) \quad (2.1)$$

$$\underline{\mathbf{H}}_t(r, \theta, z) = \underline{\mathbf{h}}_t(r, \theta) (P_1 e^{-k_z z} - P_2 e^{k_z z}) \quad (2.2)$$

$\underline{\mathbf{e}}_t(r, \theta)$ e $\underline{\mathbf{h}}_t(r, \theta)$ sono delle funzioni vettoriali delle coordinate trasverse e sono dei vettori complessi cioè rappresentativi di quantità vettoriali variabili sinusoidalmente nel tempo. Queste due quantità non sono indipendenti infatti si ha:

$$\underline{\mathbf{e}}_t = \eta_w \underline{\mathbf{h}}_t \times \mathbf{z}_0 \quad (2.3)$$

η_w rappresenta l'impedenza d'onda del modo TEM definita come:

$$\eta_w = \eta_{WR} + j\eta_{WJ} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon' - j\epsilon''}} \quad (2.4)$$

$\mu = \mu_0 \mu_r$ (H/m) rappresenta la permeabilità del mezzo interposto tra i due conduttori con $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (H/m) e $\mu_r \approx 1$. $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_0 \epsilon_r' - j\epsilon_0 \epsilon_r''$ (F/m) rappresenta la permittività del mezzo con $\epsilon_0 = (1/36\pi) 10^{-9}$ (F/m).

$K_z = \alpha_z + j\beta_z$ è la costante di propagazione del modo TEM. P_1 e P_2 sono delle costanti complesse il cui valore può essere determinato in base alle condizioni di chiusura e di eccitazione della linea.

Per l'onda TEM nel cavo coassiale la componente $\underline{\mathbf{e}}_t(r, \theta)$ del campo elettromagnetico può essere ricavata a partire dalla distribuzione di potenziale nella sezione:

$$\underline{\mathbf{e}}_t = -\nabla_t \Phi(r, \theta) \quad (2.5)$$

La distribuzione di potenziale si ottiene a sua volta risolvendo l'equazione di Laplace:

$$\nabla_t^2 \Phi(r, \theta) = 0 \quad (2.6)$$

con le condizioni al contorno $\Phi = \Phi_1$ sul conduttore 1 e $\Phi = \Phi_2$ sul conduttore 2.

Essendo il cavo coassiale una struttura a due conduttori, esisterà in esso un'unica possibile distribuzione di potenziale $\Phi(r, \theta)$ definita a meno di una costante additiva.

(*) R. E. Collin: Foundation for microwave engineering, McGraw-Hill, 1992.

Risolvendo l'equazione di Laplace in coordinate cilindriche (r, θ) si trova che il potenziale non dipende dalla coordinata θ e vale:

$$\Phi(r) = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln \frac{a}{b}} \ln \left(\frac{r}{b} \right) \quad (2.7)$$

dove a e b rappresentano rispettivamente i raggi del conduttore interno ed esterno (Fig. 2.1).

I campi $\underline{e}_t(r, \theta)$ ed $\underline{h}_t(r, \theta)$ possono essere quindi ottenuti come:

$$\underline{e}_t(r, \theta) = -\nabla_t \Phi(r) = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln \frac{b}{a}} \frac{\underline{r}_0}{r} \quad (2.8)$$

$$\underline{h}_t(r, \theta) = \frac{1}{\eta_w} \underline{z}_0 \times \underline{e}_t(r, \theta) = \frac{1}{\eta_w} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln \frac{b}{a}} \frac{\underline{\theta}_0}{r} \quad (2.9)$$

Come si evidenzia dalle (2.8)-(2.9) il campo elettrico è puramente radiale mentre quello magnetico è puramente circonferenziale.

Si definisce impedenza caratteristica Z_0 del modo TEM (o del cavo coassiale) il rapporto tra la tensione $\mathbf{V}(z)$ e la corrente $\mathbf{I}(z)$ nel caso che sia presente solo l'onda progressiva ($P_2 = 0$), per cui utilizzando le (2.8)-(2.9) si ha:

$$Z_0 = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{I}_0} = \frac{-\int_{P_2}^{P_1} \underline{e}_t(r, \theta) \cdot \underline{l} \, dl}{\oint_{l_1} \underline{h}_t(r, \theta) \cdot \underline{l}_1 \, dl_1} = \frac{\eta_w}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (2.10)$$

dove \mathbf{V}_0 rappresenta la tensione tra i due conduttori ed \mathbf{I}_0 la corrente che scorre sul conduttore interno (opposta a quella che scorre sul conduttore esterno).

Si vuole ora associare al modo TEM nel cavo coassiale una linea di trasmissione equivalente con la quale si possa studiare la propagazione del campo lungo il cavo attraverso la propagazione della tensione e della corrente lungo la linea equivalente. A tale scopo si devono inizialmente determinare i parametri primari della linea equivalente.

2.2.b Definizione di linea di trasmissione equivalente

A partire dal campo elettrico trasversale è possibile valutare la carica per unità di lunghezza sul conduttore interno integrando la densità di carica lungo il perimetro del conduttore:

$$\mathbf{Q}' = \oint_{l_1} \varepsilon' \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_t(r, \theta) dl_1 = 2\pi\varepsilon' \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad (2.11)$$

La capacità per unità di lunghezza del cavo coassiale è, pertanto, data da:

$$C' = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\varepsilon'}{\ln \frac{b}{a}} \quad (2.12)$$

Analogamente, a partire dal campo magnetico trasversale, è possibile definire il flusso magnetico tra i due conduttori per unità di lunghezza come:

$$\Psi' = \int_{P_1}^{P_2} \mu \mathbf{h}_t(r, \theta) \cdot \mathbf{n} dl = \frac{\mu V_0}{\eta_w} \quad (2.13)$$

e quindi l'induttanza per unità di lunghezza del cavo coassiale è data da:

$$L' = \frac{\Psi'}{I_0} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (2.14)$$

Poiché il dielettrico tra i due conduttori è in generale con perdite, esisterà in esso, oltre alla corrente di spostamento I_s , anche una corrente di conduzione I_c per cui la corrente che va dal conduttore 1 al conduttore 2 per unità di lunghezza sarà:

$$I' = I'_s + I'_c = j\omega\varepsilon' \oint_{l_1} \mathbf{e}_t(r, \theta) \cdot \mathbf{n}_1 dl_1 + \omega\varepsilon'' \oint_{l_1} \mathbf{e}_t(r, \theta) \cdot \mathbf{n}_1 dl_1 \quad (2.15)$$

Quindi la conducibilità per unità di lunghezza del cavo coassiale risulta data da:

$$G' = \frac{I'_c}{V_0} = \frac{I'_c I'_s}{I'_s V_0} = \frac{\omega\varepsilon''}{j\omega\varepsilon'} j\omega C' = \omega C' \tan \delta = \frac{2\pi\omega\varepsilon''}{\ln \frac{b}{a}} \quad (2.16)$$

dove $\tan \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$.

Le perdite dovute alla conducibilità finita dei conduttori possono essere tenute in conto tramite una resistenza per unità di lunghezza definita secondo la relazione:

$$\frac{1}{2} R' I_0^2 = \frac{R_s}{2} \int_{l_1+l_2} |\underline{h}_t(r, \theta)|^2 dl \quad (2.17)$$

dove $R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}$ rappresenta la resistenza superficiale e l'espressione a secondo membro rappresenta la potenza dissipata per unità di lunghezza nei due conduttori espressa in funzione del campo magnetico valutato in assenza di perdite (metodo perturbazionale).

Quindi la resistenza R' per unità di lunghezza risulta data da:

$$R' = R_s \frac{\int_{l_1+l_2} |\underline{h}_t(r, \theta)|^2 dl_i}{\left(\int_{l_1} |\underline{h}_t(r, \theta)| dl_1 \right)^2} = \frac{R_s}{2\pi} \frac{b+a}{ab} \quad (2.18)$$

Si noti che a rigore la presenza delle perdite nel conduttore è incompatibile con l'esistenza di un modo TEM. Infatti, per effetto della $g \neq \infty$, all'interno del conduttore sarà presente una densità di corrente di volume e quindi un campo elettrico assiale. Per continuità, questo campo sarà presente anche nel dielettrico all'interno del cavo e quindi l'onda che si propaga non è più un'onda TEM. La definizione di R' è valida con buona approssimazione nell'ipotesi di basse perdite.

Infine si noti che l'onda TEM che propaga nel cavo può accoppiarsi con altre fonti di energia elettromagnetica. Per tener conto di questi accoppiamenti si introduce un generatore di corrente per unità di lunghezza $I'_p(z)$ e un generatore di tensione per unità di lunghezza $V'_s(z)$.

Tutte le quantità sopra definite possono essere mostrate in un circuito valido per un tratto infinitesimo di lunghezza dz (Fig. 2.2).

Nella figura si è posto $Z' = R' + j\omega L'$ (impedenza serie per unità di lunghezza) e $Y' = G' + j\omega C'$ (ammettenza parallelo per unità di lunghezza).

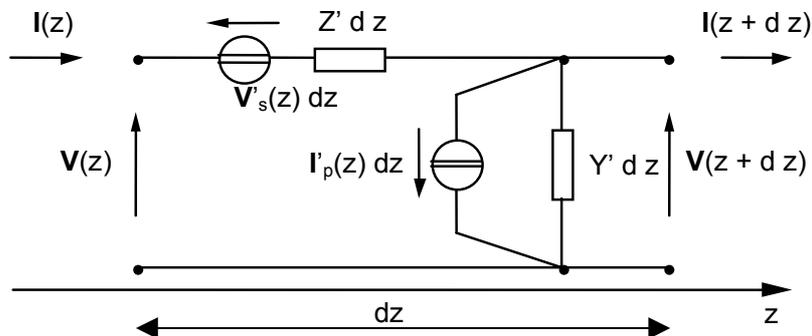


Fig. 2.2

In definitiva, per una generica linea di trasmissione possono definirsi i seguenti "parametri primari" ed "eccitazioni distribuite":

- C' = Capacità parallela per unità di lunghezza (F/m)
- L' = Induttanza serie per unità di lunghezza (H/m)
- G' = Conduttanza parallela per unità di lunghezza (S/m)
- R' = Resistenza serie per unità di lunghezza (Ω /m)
- $I_p'(z)$ = Generatore di Corrente per unità di lunghezza (A/m)
- $V_s'(z)$ = Generatore di Tensione per unità di lunghezza (V/m)

2.2.c Studio della propagazione attraverso la linea di trasmissione equivalente

Applicando le equazioni di Kirchhoff alla maglia di ingresso ed al nodo di uscita di Fig. 2.2 si ha:

$$\mathbf{V}(z) - \mathbf{V}'_s(z)dz - \mathbf{I}(z)Z'dz - \mathbf{V}(z) - d\mathbf{V}(z) = 0 \quad (2.19)$$

$$\mathbf{I}(z) - \mathbf{I}'_p(z)dz - \mathbf{I}(z) - d\mathbf{I}(z) - [\mathbf{V}(z) + d\mathbf{V}(z)]Y'dz = 0 \quad (2.20)$$

dove si è posto $\mathbf{V}(z+dz) = \mathbf{V}(z) + d\mathbf{V}(z)$ e $\mathbf{I}(z+dz) = \mathbf{I}(z) + d\mathbf{I}(z)$. Dalle relazioni (2.19)-(2.20), eliminando gli infinitesimi del secondo ordine, si ottengono le note equazioni dei telegrafisti generalizzate:

$$\frac{d\mathbf{V}(z)}{dz} = -Z'\mathbf{I}(z) - \mathbf{V}'_s(z) \quad (2.21)$$

$$\frac{d\mathbf{I}(z)}{dz} = -Y'\mathbf{V}(z) - \mathbf{I}'_p(z) \quad (2.22)$$

Derivando la (2.21) rispetto a z e sostituendo nell'equazione trovata l'espressione (2.22) si ottiene:

$$\frac{d^2\mathbf{V}(z)}{dz^2} = Z'Y'\mathbf{V}(z) + Z'\mathbf{I}'_p(z) - \frac{d\mathbf{V}'_s(z)}{dz} \quad (2.23)$$

Dualmente derivando la (2.22) rispetto a z e sostituendo nell'equazione trovata l'espressione (2.21) si ottiene:

$$\frac{d^2\mathbf{I}(z)}{dz^2} = Z'Y'\mathbf{I}(z) + Y'\mathbf{V}'_s(z) - \frac{d\mathbf{I}'_p(z)}{dz} \quad (2.24)$$

L'analisi delle linee di trasmissione si completa introducendo i parametri secondari della linea. La costante di propagazione complessa (*) è data da:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z'Y'} = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')} \quad (2.25)$$

mentre l'impedenza caratteristica complessa è data da:

$$Z_0 = Z_{0r} + jZ_{0j} = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}} \quad (2.26)$$

Con queste posizioni le (2.23) e (2.24) diventano:

$$\frac{d^2\mathbf{V}(z)}{dz^2} - \gamma^2\mathbf{V}(z) = +\gamma Z_0 \mathbf{I}'_p(z) - \frac{d\mathbf{V}'_s(z)}{dz} \quad (2.27)$$

$$\frac{d^2\mathbf{I}(z)}{dz^2} - \gamma^2\mathbf{I}(z) = +\frac{\gamma}{Z_0} \mathbf{V}'_s(z) - \frac{d\mathbf{I}'_p(z)}{dz} \quad (2.28)$$

Le equazioni differenziali del secondo ordine ottenute sono non omogenee per la presenza dei termini $\mathbf{I}'_p(z)$ e $\mathbf{V}'_s(z)$.

La soluzione generale delle Eq. (2.27)-(2.28) verrà studiata in seguito (par. 2.4.b); ora si vuole cercare la soluzione in assenza di eccitazioni distribuite ($\mathbf{I}'_p(z) = 0$ e $\mathbf{V}'_s(z) = 0$). Con riferimento alla (2.27) in questo caso si ha:

$$\frac{d^2\mathbf{V}(z)}{dz^2} - \gamma^2\mathbf{V}(z) = 0 \quad (2.29)$$

la cui soluzione è:

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{V}^+ e^{-\gamma z} + \mathbf{V}^- e^{+\gamma z} \quad (2.30)$$

Sostituendo la (2.30) nella (2.21) (con $\mathbf{V}'_s(z)=0$) si ottiene la corrispondente soluzione per la corrente:

$$\mathbf{I}(z) = \left(\frac{1}{Z_0} \right) (\mathbf{V}^+ e^{-\gamma z} - \mathbf{V}^- e^{+\gamma z}) = \mathbf{I}^+ e^{-\gamma z} - \mathbf{I}^- e^{+\gamma z} \quad (2.31)$$

Quindi tensione e corrente lungo la linea sono date dalla sovrapposizione di due onde: una progressiva (costante di propagazione $-\gamma$) e l'altra regressiva (costante di propagazione $+\gamma$).

(*) Nel caso del cavo coassiale si è usato il simbolo K_z . I due simboli si incontrano indifferentemente in letteratura.

Una condizione spesso verificata nelle applicazioni pratiche è quella di basse perdite ($R' \ll \omega L'$ e $G' \ll \omega C'$). In queste condizioni le (2.25) e (2.26) diventano:

$$\gamma \approx \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z_0} + G' Z_0 \right) + j\omega \sqrt{L' C'} \quad (2.32)$$

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (2.33)$$

La situazione è analoga a quella in assenza di perdite ($\beta \approx \omega \sqrt{L' C'}, \alpha = 0$) con l'aggiunta di un termine di attenuazione legato alle perdite nel dielettrico e nei conduttori.

2.2.d Parametri caratteristici della linea

L'attenuazione di una linea lunga l misurata in deciBell (dB) è data dal rapporto tra la potenza entrante e quella uscente dalla linea:

$$A_{dB} = 10 \log \frac{P_{IN}}{P_{OUT}} = 10 \log \frac{P_{IN}}{P_{IN} e^{-2\alpha l}} = 8.686 \alpha l \text{ dB} \quad (2.34)$$

Altre due quantità che vengono definite nella teoria delle linee di trasmissione sono l'impedenza della linea ed il coefficiente di riflessione. Si definisce impedenza della linea il rapporto tra la tensione e la corrente alla generica ascissa z :

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z}}{V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}} \quad (2.35)$$

Si definisce coefficiente di riflessione della linea il rapporto tra l'onda regressiva e l'onda progressiva alla generica ascissa z :

$$\Gamma(z) = \frac{V^- e^{+\gamma z}}{V^+ e^{-\gamma z}} = \frac{V^-}{V^+} e^{2\gamma z} \quad (2.36)$$

Queste due quantità, come è facilmente verificabile, sono collegate dalle relazioni:

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0} \quad (2.37)$$

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad (2.38)$$

2.3 Linee di trasmissione chiuse su carichi

Si vuole ora analizzare la chiusura di una linea di trasmissione su di un carico di impedenza Z_L (Fig. 2.3).

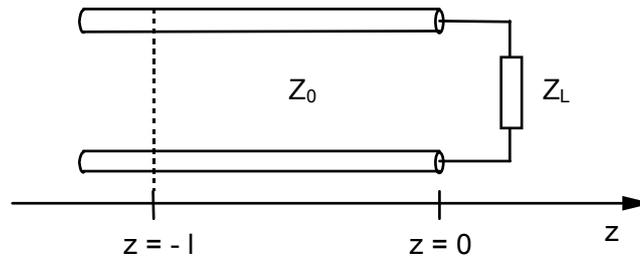


Fig. 2.3

In corrispondenza del carico ($z = 0$) le relazioni (2.37) e (2.38) diventano:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \quad (2.39)$$

In corrispondenza della sezione $-l$, utilizzando le (2.35) e (2.36), si ha:

$$Z(-l) = \frac{\mathbf{V}(-l)}{\mathbf{I}(-l)} = Z_0 \frac{\mathbf{V}^+ e^{+\gamma l} + \mathbf{V}^- e^{-\gamma l}}{\mathbf{V}^+ e^{+\gamma l} - \mathbf{V}^- e^{-\gamma l}} \quad (2.40)$$

$$\Gamma(-l) = \frac{\mathbf{V}^- e^{-\gamma l}}{\mathbf{V}^+ e^{+\gamma l}} = \frac{\mathbf{V}^-}{\mathbf{V}^+} e^{-2\gamma l} \quad (2.41)$$

Le relazioni così ottenute insieme alle (2.39) danno:

$$Z(-l) = Z_0 \frac{Z_L \cosh(\gamma l) + Z_0 \sinh(\gamma l)}{Z_0 \cosh(\gamma l) + Z_L \sinh(\gamma l)} \quad (2.42)$$

$$\Gamma(-l) = \Gamma_L e^{-2\gamma l} \quad (2.43)$$

che in assenza di perdite diventano:

$$Z(-l) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta l) + jZ_0 \sin(\beta l)}{Z_0 \cos(\beta l) + jZ_L \sin(\beta l)} \quad (2.44)$$

$$\Gamma(-l) = \Gamma_L e^{-2j\beta l} \quad (2.45)$$

Per una linea priva di perdite si definisce un ulteriore parametro detto rapporto d'onda stazionaria (ROS o SWR secondo l'acronimo inglese), definito come il rapporto tra il valore massimo ed il valore minimo che il modulo della tensione assume lungo la linea. Volendo correlare il ROS al coefficiente di riflessione del carico si riscrive la tensione lungo la linea come:

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{V}^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}) \quad (2.46)$$

da cui risulta:

$$|\mathbf{V}(z)|^2 = |\mathbf{V}^+|^2 \left[1 + |\Gamma_L|^2 + 2\text{Re}(\Gamma_L e^{+2j\beta z}) \right] \quad (2.47)$$

Posto: $\Gamma_L = \rho e^{j\varphi}$ si ha:

$$|\mathbf{V}(z)|^2 = |\mathbf{V}^+|^2 \left[1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi + 2\beta z) \right] \quad (2.48)$$

Al variare di z l'ampiezza della tensione oscilla tra un valore massimo ed uno minimo sfasati di $\pi/2$. Infatti il massimo si ha per $\varphi + 2\beta z = 2n\pi$ e vale:

$$V_{\text{MAX}} = |\mathbf{V}^+| (1 + \rho) = |\mathbf{V}^+| + |\mathbf{V}^-| \quad (2.49)$$

il minimo per $\varphi + 2\beta z = (2n+1)\pi$ e vale:

$$V_{\text{MIN}} = |\mathbf{V}^+| (1 - \rho) = |\mathbf{V}^+| - |\mathbf{V}^-| \quad (2.50)$$

Il rapporto d'onda stazionaria in base alle (2.49) e (2.50) è esprimibile come:

$$\text{ROS} = \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{MIN}}} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (2.51)$$

Come risulta dalla (2.51) il ROS è sempre maggiore o uguale ad uno.

Equazioni simili alle (2.49)-(2.50) possono essere ricavate anche per la corrente:

$$I_{\text{MAX}} = \frac{|\mathbf{V}^+| + |\mathbf{V}^-|}{Z_0} \quad (2.52)$$

$$I_{\text{MIN}} = \frac{|\mathbf{V}^+| - |\mathbf{V}^-|}{Z_0} \quad (2.53)$$

A causa del segno meno presente nell'equazione della corrente (2.31), si ha che la posizione di massimo della tensione è anche quella di minimo della corrente. In questo punto l'impedenza è puramente resistiva e ha il suo valore massimo:

$$Z_{\text{MAX}} = \frac{V_{\text{MAX}}}{I_{\text{MIN}}} = Z_0 \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} = Z_0 \text{ROS} \quad (2.54)$$

Viceversa nel punto di minimo della tensione la corrente ha un massimo e l'impedenza assume il suo valore minimo:

$$Z_{\text{MIN}} = \frac{V_{\text{MIN}}}{I_{\text{MAX}}} = Z_0 \frac{|V^+| - |V^-|}{|V^+| + |V^-|} = \frac{Z_0}{\text{ROS}} \quad (2.55)$$

Nel seguito verranno analizzati alcuni casi tipici di chiusura di una linea considerata priva di perdite (par. 2.3.a e par. 2.3.d) o con basse perdite (par. 2.3.e).

2.3.a Linea chiusa su carico adattato

Lo schema circuitale di una linea chiusa su di un carico adattato è riportato in Fig. 2.4. In questo caso si ha $Z_L = Z_0$ e quindi $\Gamma_L = 0$ e $\text{ROS} = 1$; ad ogni ascissa $z = -l$ risulta $Z(-l) = R(-l) = Z_0$ (Fig. 2.5.a) e $\Gamma(-l) = 0$ (Eq. 2.44 - 2.45).

Come si evince dalla (2.46), manca l'onda riflessa per cui i moduli di $V(z)$ ed $I(z)$ risultano costanti lungo la linea (Fig. 2.5.b).

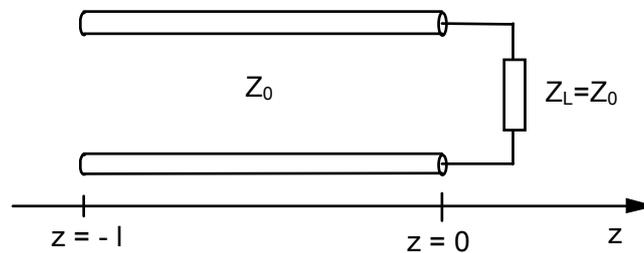


Fig. 2.4

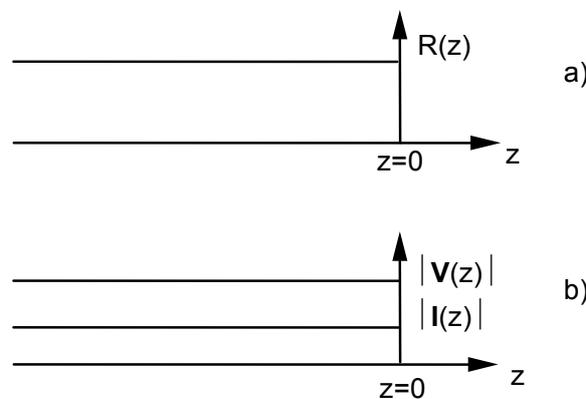


Fig. 2.5

2.3.b Linea chiusa su carico resistivo

Lo schema circuitale di una linea chiusa su di un carico resistivo è riportato in Fig. 2.6.

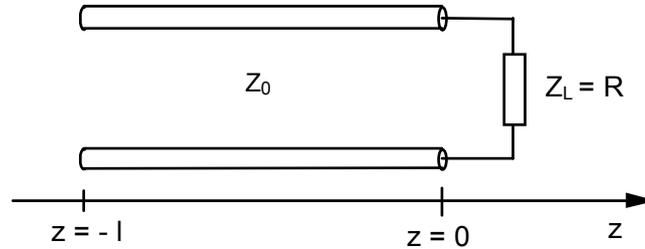


Fig. 2.6

In questo caso si ha $Z_L = R$ e quindi $\Gamma_L = \rho = (R - Z_0) / (R + Z_0)$ e $ROS = (1 + \rho) / (1 - \rho)$. All'ascissa $z = -l$ risulta:

$$Z(-l) = Z_0 \frac{R \cos \beta l + j Z_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j R \sin \beta l} \quad (2.56)$$

$$\Gamma(-l) = \rho e^{-2j\beta l} \quad (2.57)$$

In Fig. 2.7 è riportata la parte reale (a) ed immaginaria (b) dell'impedenza della linea e l'andamento del modulo di tensione e corrente (c) al variare di z ottenuti graficando le relazioni precedenti. Gli andamenti riportati in Fig. 2.7 confermano, come detto in precedenza, che, nei punti della linea in cui la tensione è massima, la corrente è minima e l'impedenza risulta puramente resistiva.

2.3.c Linea chiusa su corto circuito

Lo schema circuitale di una linea di trasmissione chiusa in corto circuito è riportato in Fig. 2.8. In questo caso si ha $Z_L = 0$ e quindi $\Gamma_L = -1$ e $ROS = \infty$; ad ogni ascissa $z = -l$ risulta (Fig. 2.9.a):

$$Z(-l) = j Z_0 \tan \beta l \quad (2.58)$$

$$\Gamma(-l) = -e^{-2j\beta l}$$

Inoltre dalla (2.46) si ricava per la tensione lungo la linea l'espressione $V(z) = -j2V^+ \sin \beta z$ mentre per la corrente si ricava $I(z) = 2(V^+ / Z_0) \cos \beta z$ (Fig. 2.9.b).

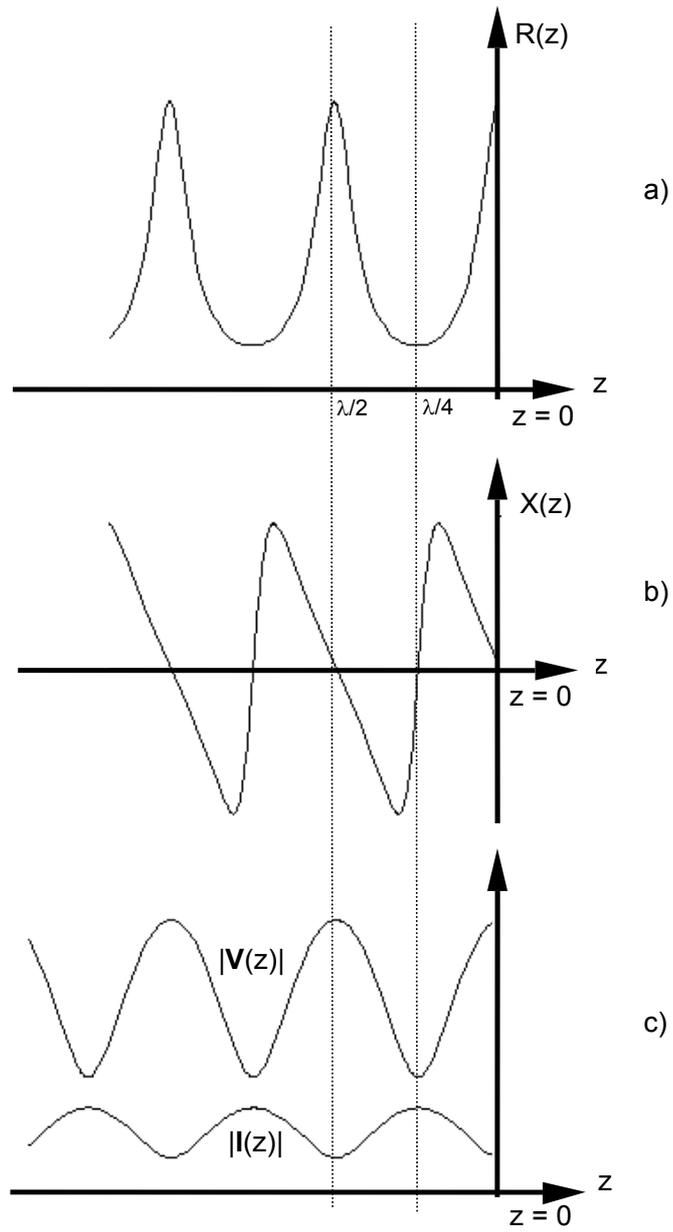


Fig. 2.7

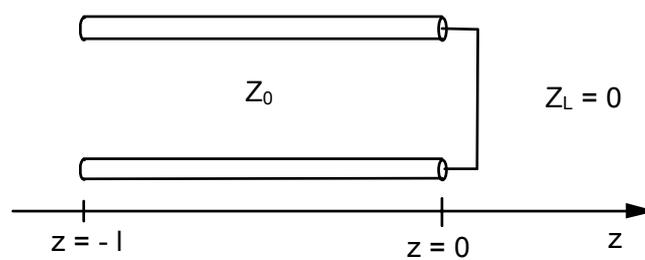


Fig. 2.8

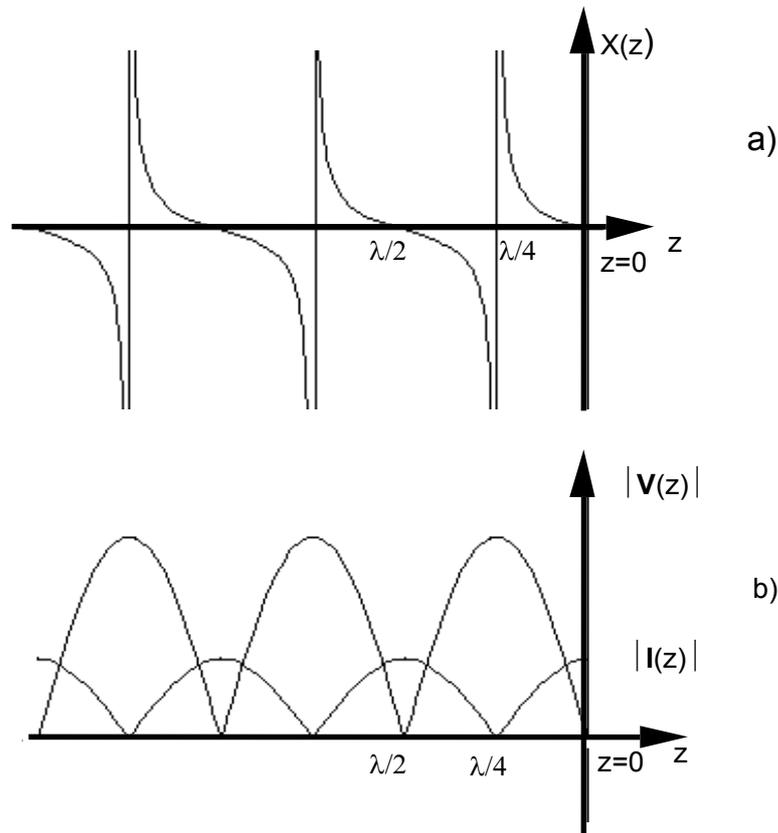


Fig. 2.9

Come si evince dalla Fig. 2.9.a l'impedenza della linea $Z(-l) = jX(-l)$ risulta in corrispondenza di alcuni valori di z di tipo induttivo ($X(-l) > 0$) ed in altri di tipo capacitivo ($X(-l) < 0$). In particolare, per $l < \lambda/4$ la reattanza $X(-l)$ è positiva per cui possiamo porre $X(-l) = \omega L_{eq}$ e quindi:

$$L_{eq} = X(-l) / \omega = (Z_0 / \omega) \tan \beta l \quad (2.59)$$

Se è verificata l'ulteriore ipotesi $l < \lambda/12$ si può utilizzare l'approssimazione $\tan \beta l \approx \beta l$ da cui segue:

$$L_{eq} = Z_0 \beta l / \omega = Z_0 l / c = L'l \quad (2.60)$$

Quindi una linea di trasmissione chiusa su un corto circuito, con valori di l piccoli rispetto a λ , si comporta come un'induttanza; questo risultato si comprende intuitivamente se si pensa alla linea cortocircuitata come ad un'induttanza formata da una sola spira.

Il comportamento della linea cortocircuitata in funzione della frequenza è simile a quello riportato in Fig. 2.9a. In particolare, alle frequenze per cui $\omega = (2n-1)\pi c/2l$ ($l = (2n-1)\lambda/4$) una linea chiusa in corto circuito si comporta come un circuito risonante parallelo, mentre alle frequenze per cui $\omega = n\pi c/l$ ($l = n\lambda/2$) la linea chiusa su un cortocircuito si comporta come un circuito risonante serie. A titolo di confronto, e per meglio evidenziare quanto detto, in

Fig. 2.10 sono riportati in funzione della frequenza gli andamenti della reattanza per un circuito risonante serie e per uno risonante parallelo. Nella figura $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ è la frequenza di risonanza del circuito.

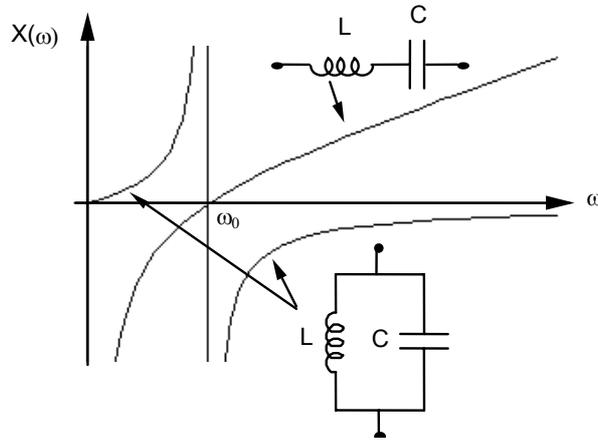


Fig. 2.10

2.3.d Linea chiusa su circuito aperto

Lo schema circuitale di una linea di trasmissione aperta è riportato in Fig. 2.11. In questo caso si ha $Z_L = \infty$ e quindi $\Gamma_L = +1$ e ROS = ∞ ; ad ogni ascissa $z = -l$ risulta (Fig. 2.12.a):

$$Z(-l) = -jZ_0 \cotan \beta l \quad (2.61)$$

$$\Gamma(-l) = e^{-2j\beta l} \quad (2.62)$$

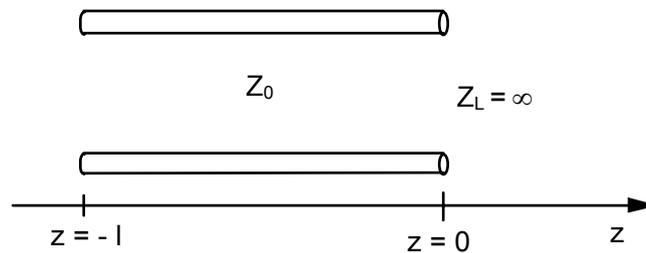


Fig. 2.11

Inoltre, dalla (2.45) si ricava per la tensione lungo la linea l'espressione $V(z) = 2V^+ \cos \beta z$ (Fig. 2.12.b) mentre per la corrente si ricava $I(z) = -2j(V^+/Z_0) \sin \beta z$ (Fig. 2.12.a).

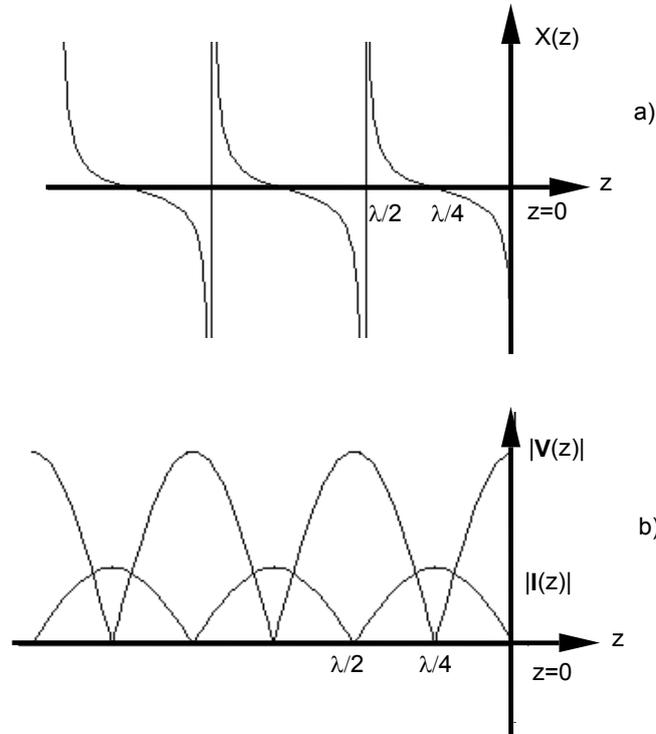


Fig. 2.12

Come si vede dalla figura, per $l < \lambda/4$ la reattanza $X(-l)$ è negativa per cui possiamo porre $B(-l) = -1/X(-l) = \omega C_{eq}$ da cui:

$$C_{eq} = (1 / Z_0 \omega) \tan \beta l \quad (2.63)$$

In particolare se risulta $l < \lambda/12$ vale l'approssimazione $\tan \beta l \approx \beta l$ da cui segue:

$$C_{eq} \approx l / Z_0 c = C'l \quad (2.64)$$

Quindi una linea di trasmissione aperta, per piccoli valori di l , si comporta come una capacità; questo risultato si comprende intuitivamente se si pensa alla linea aperta come ad un condensatore.

Passando a considerare il comportamento della linea aperta in funzione della frequenza si possono fare delle considerazioni analoghe a quelle fatte nel caso di chiusura con un corto circuito. In particolare, alle frequenze per cui risulta $\omega = (2n-1)\pi c/2l$ la linea aperta si comporta come un circuito risonante

serie, mentre alle frequenze per cui risulta $\omega = n\pi c/l$ la linea aperta si comporta come un circuito risonante parallelo.

2.3.e Linea con basse perdite

Nell'ipotesi di linea con basse perdite, l'impedenza alla generica ascissa z può essere valutata considerando l'equazione (2.42). Come visto in precedenza, [Eq. (2.33)] in presenza di basse perdite l'impedenza caratteristica della linea si può ancora considerare reale. Nel caso di una linea chiusa su di un carico con impedenza pari a Z_0 , risulta sempre $Z(-l) = Z_0$.

Se la linea con basse perdite è chiusa su un corto circuito, la (2.42) diventa:

$$Z(-l) = \frac{V(-l)}{I(-l)} = Z_0 \tanh(\gamma l) = Z_0 \frac{\tanh(\alpha l) + j \tan(\beta l)}{1 + j \tanh(\alpha l) \tan(\beta l)} \quad (2.65)$$

per $l = n(\lambda/2)$ si ha:

$$Z(-l) = Z_0 \tanh \alpha l \approx Z_0 \alpha l \quad (2.66)$$

mentre per $l = (2n-1)(\lambda/4)$ si ha:

$$Z(-l) = Z_0 / \tanh \alpha l \approx Z_0 / \alpha l \quad (2.67)$$

dove le approssimazioni valgono per $\alpha l < 0.1$.

Spesso, nello studio delle linee chiuse su un corto circuito o aperte, si è interessati all'andamento dell'impedenza di ingresso in funzione della frequenza per frequenze nell'intorno di quelle della risonanza serie o parallelo (Fig. 2.10).

Nell'ipotesi di basse perdite e per piccoli valori di l ($\alpha l < 0.1$) si ha:

$$Z(-l) = \frac{Z_0 \alpha l [1 + \tan^2(\beta l)] + j Z_0 \tan(\beta l)}{1 + [\alpha l \tan(\beta l)]^2} \quad (2.68)$$

Per frequenze nell'intorno di quelle della prima risonanza serie ($\beta l = \pi$) si ha $\tan^2 \beta l \ll 1$ e quindi:

$$Z(-l) = Z_0 \alpha l + j Z_0 \tan(\beta l) \quad (2.69)$$

Il fattore di merito (Q) di un circuito risonante si può esprimere (*) come:

$$Q = \frac{\omega_R}{2R_{IN}} \left(\frac{dX_{IN}}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_R} \quad (2.70)$$

(*) La (2.70) è equivalente alla definizione di S_F (v. par. 1.3, Vol. 2)

dove ω_R è la frequenza di risonanza del circuito supposto privo di perdite e $Z_{IN} = R_{IN} + jX_{IN}$ è l'impedenza di ingresso. Pertanto nel caso in esame si ottiene:

$$Q = \frac{\omega_R}{2Z_0\alpha} \left(\frac{d(Z_0 \tan(\beta l))}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_R} \cong \frac{\beta}{2\alpha} \quad (2.71)$$

Alla quantità Q viene dato il nome di fattore di merito della linea in quanto consente di valutarne la bontà (Q grandi = basse perdite) e di confrontare tra di loro diverse strutture guidanti.

2.4 Eccitazione di una linea di trasmissione

Lo schema di eccitazione di una linea di trasmissione è mostrato in Fig. 2.13.

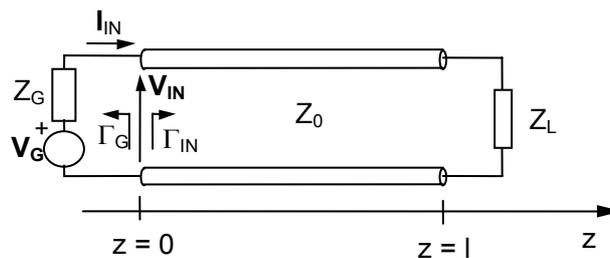


Fig. 2.13

La sorgente è schematizzata tramite la sua tensione a vuoto V_G e l'impedenza interna Z_G . Se $Z_L = Z_0$ si ha:

$$V_{IN} = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} V_G \quad I_{IN} = \frac{V_G}{Z_0 + Z_G} \quad (2.72)$$

In assenza di riflessioni, e ponendo l'origine delle ascisse in corrispondenza del generatore, risulta $V_{IN} = V^+$ ed $I_{IN} = V^+/Z_0$. Pertanto, note le caratteristiche del generatore e l'impedenza della linea, è possibile conoscere l'andamento della tensione e della corrente lungo la linea stessa.

Se Z_L è diverso da Z_0 , lungo la linea si genera un'onda riflessa per cui le ampiezze V^- e V^+ devono essere valutate tenendo conto delle condizioni di chiusura sul carico.

In particolare, in base alla legge di Kirchhoff scritta in $z=0$ si ha:

$$V_G = V_{IN} + Z_G I_{IN} \quad (2.73)$$

Si osservi preliminarmente che dalle (2.30)-(2.31)-(2.36) si ottiene:

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{V}^+ e^{-\gamma z} (1 + \Gamma(z)) \quad (2.74)$$

$$\mathbf{I}(z) = (\mathbf{V}^+ / Z_0) e^{-\gamma z} (1 - \Gamma(z)) \quad (2.75)$$

Essendo: $\mathbf{V}_{IN} = \mathbf{V}(0)$ e $\mathbf{I}_{IN} = \mathbf{I}(0)$ si ha:

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}^+ (1 + \Gamma_{IN}) + Z_G (\mathbf{V}^+ / Z_0) (1 - \Gamma_{IN})$$

Risolvendo rispetto a \mathbf{V}^+ e ponendo: $\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0}$ e $\Gamma_{IN} = \Gamma_L e^{-2\gamma l}$ si trova:

$$\mathbf{V}^+ = \frac{\mathbf{V}_G Z_0}{(Z_G + Z_0)(1 - \Gamma_G \Gamma_{IN})} = \frac{\mathbf{V}_G}{2} (1 - \Gamma_G) \frac{1}{(1 - \Gamma_G \Gamma_{IN})} \quad (2.76)$$

Anche in questo caso quindi noti Z_G , Z_0 e \mathbf{V}_G è possibile tramite le (2.74)-(2.75) valutare l'andamento della tensione e della corrente lungo la linea.

2.4.a Potenza lungo la linea

Noto l'andamento della tensione e della corrente lungo la linea è possibile calcolare la potenza media che transita lungo la linea stessa alla generica ascissa z . Nell'ipotesi di basse perdite (Z_0 reale) si ha:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{V}(z) \mathbf{I}(z)^* \} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{|\mathbf{V}^+|^2 e^{-2\alpha z}}{Z_0} \left[1 - |\Gamma(z)|^2 + \Gamma(z) - \Gamma(z)^* \right] \right\} = \quad (2.77) \\ &= P^+ (1 - |\Gamma(z)|^2) = P^+ - P^- \end{aligned}$$

dove P^+ e P^- rappresentano le potenze medie trasportate rispettivamente dall'onda progressiva e regressiva.

Inserendo nella (2.77) la (2.76) si ottiene:

$$P(z) = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} \left| \frac{1 - \Gamma_G}{1 - \Gamma_G \Gamma_{IN}} \right|^2 e^{-2\alpha z} (1 - |\Gamma(z)|^2) \quad (2.78)$$

Quindi la potenza media $P(0) = P_{IN}$ effettivamente erogata dal generatore sarà:

$$P_{IN} = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} \left| \frac{1-\Gamma_G}{1-\Gamma_G\Gamma_{IN}} \right|^2 (1-|\Gamma_{IN}|^2) \quad (2.79)$$

mentre la potenza media $P(l) = P_L$ fornita al carico è:

$$P_L = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} \left| \frac{1-\Gamma_G}{1-\Gamma_G\Gamma_{IN}} \right|^2 e^{-2\alpha l} (1-|\Gamma_L|^2) \quad (2.80)$$

Se la linea è priva di perdite $|\Gamma_{IN}| = |\Gamma_L|$, $\alpha = 0$ e risulta $P_{IN} = P_L$.

Come caso particolare si consideri quello per cui $Z_G = Z_0$ ($\Gamma_G = 0$). In questo caso risulta:

$$P_L = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} e^{-2\alpha l} (1-|\Gamma_L|^2) \quad (2.81)$$

Altro caso particolare è quello per cui $Z_L = Z_0$ e quindi $\Gamma_L = 0$ (quindi anche $\Gamma_{IN} = 0$). In questo caso risulta:

$$P_L = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} e^{-2\alpha l} |1-\Gamma_G|^2 \quad (2.82)$$

Come ultimo caso particolare si consideri quello per cui $Z_G = Z_{IN}^*$ e quindi $\Gamma_G = \Gamma_{IN}^*$. In questo caso risulta:

$$P_L = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} \left| \frac{1-\Gamma_G}{1-|\Gamma_G|^2} \right|^2 e^{-2\alpha l} (1-|\Gamma_L|^2) \quad (2.83)$$

$$P_{IN} = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} \left| \frac{1-\Gamma_G}{1-|\Gamma_G|^2} \right|^2 (1-|\Gamma_G|^2) = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} \frac{|1-\Gamma_G|^2}{1-|\Gamma_G|^2} = P_{AVG} \quad (2.84)$$

dove P_{AVG} rappresenta la potenza disponibile (available) del generatore ovvero la massima potenza che il generatore può erogare.

Come sottocaso di quest'ultima situazione si consideri la condizione $Z_L = Z_G = Z_0$ e quindi $\Gamma_L = \Gamma_G = 0$, in questo caso si ha:

$$P_L = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} e^{-2\alpha l} \quad (2.85)$$

$$P_{IN} = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} = P_{AVG} \quad (2.86)$$

2.4.b Eccitazioni distribuite

Nel caso che lungo la linea siano presenti delle eccitazioni distribuite si deve ricercare la soluzione non omogenea delle equazioni (2.23)-(2.24). Questa soluzione può essere ottenuta utilizzando la funzione di Green. In particolare, ed è quello che si illustrerà tra breve, si può studiare la risposta impulsiva della struttura e risalire alla soluzione particolare tramite un processo di integrazione.

Dati due generatori ideali di corrente e tensione posti in $z = z'$: $I_p'(z) = I_M \delta(z-z')$ e $V_s'(z) = V_M \delta(z-z')$ dove $\delta(z-z')$ è la funzione di Dirac [m^{-1}], siano $G_{II}(z,z')$, $G_{IV}(z,z')$, $G_{VI}(z,z')$ e $G_{VV}(z,z')$ le funzioni di Green in tensione o corrente (V o I a secondo pedice) relative all'eccitazione in tensione o corrente (V o I a primo pedice). Ad esempio, $G_{IV}(z,z')$ indica la tensione generata nel punto z lungo la linea per effetto del generatore ideale di corrente posto in z' .

La corrente e la tensione indotte da una generica distribuzione di corrente $I_p'(z)$ e di tensione $V_s'(z)$ saranno allora date da:

$$V(z) = \int G_{IV}(z,z') I_p'(z') dz' + \int G_{VV}(z,z') V_s'(z') dz' \quad (2.87)$$

$$I(z) = \int G_{II}(z,z') I_p'(z') dz' + \int G_{VI}(z,z') V_s'(z') dz' \quad (2.88)$$

Si consideri ad esempio il caso di una linea di trasmissione chiusa su due carichi diversi Z_1 e Z_2 . Si vuole valutare la funzione di Green $G_{IV}(z,0)$ eccitando la linea con un generatore di corrente posto in $z' = 0$ (Fig. 2.14):

Indicando con V_G la tensione ai capi del generatore di corrente si avrà $V_G = -I_M(Z_S Z_D)/(Z_S + Z_D)$; dove Z_S e Z_D sono le impedenze, che all'ascissa del generatore, si vedono a sinistra e a destra rispettivamente. Con le convenzioni indicate in Fig. 2.14 si ha: $I_1 = -V_G/Z_S$ e $I_2 = V_G/Z_D$.

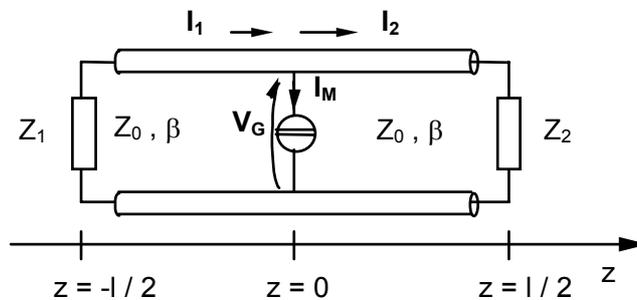


Fig. 2.14

Risolvendo la (2.29) in assenza di perdite e con le condizioni al contorno $\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_G$ ed $\mathbf{I}(0) = \mathbf{I}_2$ per $z > 0$ e $\mathbf{I}(0) = \mathbf{I}_1$ per $z < 0$, la tensione lungo la linea può essere scritta come:

$$\mathbf{G}_{IV}(z) = \{\mathbf{V}_G \cos \beta z - jZ_0 \mathbf{I}_2 \sin \beta z\} / \mathbf{I}_M \quad \text{per } z > 0 \quad (2.89)$$

$$\mathbf{G}_{IV}(z) = \{\mathbf{V}_G \cos \beta z - jZ_0 \mathbf{I}_1 \sin \beta z\} / \mathbf{I}_M \quad \text{per } z < 0$$

In generale per una sorgente posta in $z' \neq 0$, generalizzando il risultato trovato, si ha:

$$\mathbf{G}_{IV}(z, z') = \{\mathbf{V}_G(z') \cos[\beta(z-z')] - jZ_0 \mathbf{I}_2(z') \sin[\beta(z-z')]\} / \mathbf{I}_M \quad \text{per } z > z' \quad (2.90)$$

$$\mathbf{G}_{IV}(z, z') = \{\mathbf{V}_G(z') \cos[\beta(z-z')] - jZ_0 \mathbf{I}_1(z') \sin[\beta(z-z')]\} / \mathbf{I}_M \quad \text{per } z < z'$$

Nelle (2.89-2.90) la divisione per la corrente \mathbf{I}_M è stata introdotta per tener conto del fatto che la funzione di Green va valutata applicando un impulso di Dirac di area unitaria. In questo modo la funzione di Green \mathbf{G}_{IV} ha correttamente le dimensioni di ohm come si evince anche dalle (2.87)-(2.88).

In conclusione, in presenza di una eccitazione distribuita in corrente (ad esempio del tipo: $\mathbf{I}'_p(z) = \mathbf{I}_0 e^{j\beta z}$) è possibile calcolare l'andamento della tensione lungo la linea utilizzando le (2.87) (2.89) o (2.90).

Come ultima considerazione si osservi che, in base alla relazione esistente tra la tensione e la corrente ai capi del generatore di corrente parallelo: $\mathbf{V}_G = -\mathbf{I}_M(Z_S Z_D) / (Z_S + Z_D)$, se risulta:

$$Z_S + Z_D = 0 \quad (2.91)$$

la tensione e la corrente lungo la linea di trasmissione tendono all'infinito pur avendo applicato una corrente finita \mathbf{I}_M . Questa condizione viene detta di risonanza. Infatti, si possono avere tensione e corrente diverse da zero lungo la linea anche in assenza di generatori.

Si noti che questa condizione si verifica normalmente in un circuito LC a costanti concentrate alla pulsazione di risonanza (ω_0). Infatti, a questa pulsazione risulta, come noto, $\omega_0^2 LC = 1$ e, indicando con Z_L e Z_C l'impedenza associata rispettivamente all'induttanza e alla capacità, risulta: $Z_L + Z_C = 0$.

2.5 Rappresentazione matriciale dei circuiti

La rappresentazione matriciale di una rete lineare risulta particolarmente utile nell'analisi dei sistemi a microonde. Questi sistemi, infatti, sono generalmente costituiti dall'unione di più sottosistemi ciascuno dei quali è caratterizzabile, da un punto di vista esterno, tramite una matrice. Tecniche di analisi matriciale consentono poi di risalire dal comportamento del singolo componente a quello dell'intero sistema.

Per ricavare la matrice di un componente a microonde occorre fissare preliminarmente le "bocche" di ingresso alle quali afferiscono le linee di trasmissione con cui si accede al componente stesso. Si fa l'ipotesi che lungo le linee di trasmissione propaghi il solo modo fondamentale cosicché si possano definire, in maniera univoca, tensioni e correnti alle varie bocche. In Fig. 2.15 è riportata a titolo di esempio una rete a tre bocche.

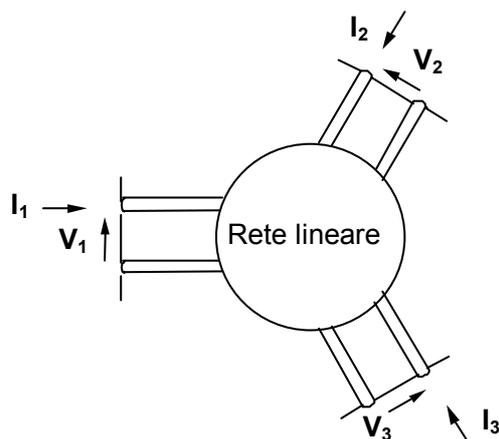


Fig. 2.15

2.5.a Matrice delle impedenze

In una rete lineare la tensione ad una porta è esprimibile come combinazione lineare delle correnti alle altre porte e alla porta in esame. Quindi, con riferimento ad una struttura ad N bocche, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= Z_{11}\mathbf{I}_1 + Z_{12}\mathbf{I}_2 + \dots + Z_{1n}\mathbf{I}_n \\ \mathbf{V}_2 &= Z_{21}\mathbf{I}_1 + Z_{22}\mathbf{I}_2 + \dots + Z_{2n}\mathbf{I}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{V}_n &= Z_{n1}\mathbf{I}_1 + Z_{n2}\mathbf{I}_2 + \dots + Z_{nn}\mathbf{I}_n \end{aligned} \tag{2.92}$$

Utilizzando la notazione matriciale, la (2.92) diventa:

$$[\mathbf{V}] = [\mathbf{Z}] [\mathbf{I}] \quad (2.93)$$

dove $[\mathbf{Z}]$ è detta "matrice delle impedenze a vuoto" e $[\mathbf{V}]$ ed $[\mathbf{I}]$ sono i vettori colonna delle tensioni e delle correnti. Il generico parametro Z_{ij} della matrice può essere espresso come il rapporto tra la tensione alla i -esima porta e la corrente alla j -esima porta nell'ipotesi che tutte le altre porte risultino aperte, ovvero:

$$Z_{ij} = \left(\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{I}_j} \right)_{\mathbf{I}_k=0 \text{ con } k \neq j} \quad (2.94)$$

La matrice $[\mathbf{Z}]$ è caratterizzata da $N \times N$ parametri complessi; tuttavia, il numero dei parametri indipendenti si riduce se si considerano particolari classi di componenti.

Un componente si dice "reciproco" se soddisfa il teorema di reciprocità di Lorentz (v. Collin opera citata). Per questi componenti risulta: $Z_{ij} = Z_{ji}$, quindi la matrice $[\mathbf{Z}]$ coincide con la sua trasposta. Un componente si dice privo di perdite se non presenta al suo interno elementi in grado di dissipare potenza. Per questi componenti, se la rete è reciproca, i parametri della matrice delle impedenze risultano puramente immaginari.

2.5.b Matrice delle ammettenze

In questa rappresentazione, valida per reti lineari, si lega la corrente ad una bocca con le tensioni alle altre bocche:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= Y_{11} \mathbf{V}_1 + Y_{12} \mathbf{V}_2 + \dots + Y_{1n} \mathbf{V}_n \\ \mathbf{I}_2 &= Y_{21} \mathbf{V}_1 + Y_{22} \mathbf{V}_2 + \dots + Y_{2n} \mathbf{V}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{I}_n &= Y_{n1} \mathbf{V}_1 + Y_{n2} \mathbf{V}_2 + \dots + Y_{nn} \mathbf{V}_n \end{aligned} \quad (2.95)$$

In forma matriciale la (2.95) diventa:

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{Y}] [\mathbf{V}] \quad (2.96)$$

Il generico parametro Y_{ij} è esprimibile come:

$$Y_{ij} = \left(\frac{\mathbf{I}_i}{\mathbf{V}_j} \right)_{\mathbf{V}_k=0 \text{ con } k \neq j} \quad (2.97)$$

Valgono le seguenti proprietà; per componenti reciproci: $Y_{ij} = Y_{ji}$; in assenza di perdite, e per reti reciproche, i parametri della matrice risultano puramente immaginari.

2.5.c Matrice di diffusione

La matrice di diffusione (scattering) caratterizza le reti in termini di onde incidenti (\mathbf{a}_i) e riflesse (\mathbf{b}_i) valutate alle bocche. Tali onde sono definite a partire dalla tensione incidente \mathbf{V}_i^+ e riflessa \mathbf{V}_i^- , valutate alle bocche, in base alle relazioni:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{V}_i^+ = \mathbf{I}_i^+ Z_{0i} \quad (2.98)$$

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{V}_i^- = \mathbf{I}_i^- Z_{0i} \quad (2.99)$$

Quindi, la tensione e la corrente alle bocche possono essere espresse come:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i^+ + \mathbf{V}_i^- = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \quad (2.100)$$

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_i^+ - \mathbf{I}_i^- = \frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i}{Z_{0i}} \quad (2.101)$$

Invertendo le (2.100)-(2.101), le onde incidenti e riflesse possono essere espresse come (*):

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{V}_i + \mathbf{I}_i Z_{0i}}{2} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{V}_i - \mathbf{I}_i Z_{0i}}{2} \quad (2.103)$$

(*) Le onde così definite hanno la dimensione di volt e sono quindi dette "onde di tensione". Esistono altre possibili definizioni, una molto utilizzata è la seguente:

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{V}_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} = \mathbf{I}_i^+ \sqrt{Z_{0i}} \quad \mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{V}_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} = \mathbf{I}_i^- \sqrt{Z_{0i}}$$

In questo caso \mathbf{a} e \mathbf{b} sono dimensionalmente pari alla radice quadrata di una potenza e si parla quindi di "onde di potenza". In questo caso si ottiene:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i^+ + \mathbf{V}_i^- = \sqrt{Z_{0i}} (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) \quad \mathbf{I}_i = \mathbf{I}_i^+ - \mathbf{I}_i^- = \frac{1}{\sqrt{Z_{0i}}} (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i)$$

e quindi, le onde incidenti e riflesse possono essere espresse come:

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{V}_i}{\sqrt{Z_{0i}}} + \mathbf{I}_i \sqrt{Z_{0i}} \right) \quad \mathbf{b}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{V}_i}{\sqrt{Z_{0i}}} - \mathbf{I}_i \sqrt{Z_{0i}} \right)$$

Per una rete lineare N porte, le onde incidenti e quelle riflesse sono correlate tra di loro dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_1 &= S_{11}\mathbf{a}_1 + S_{12}\mathbf{a}_2 + \dots + S_{1n}\mathbf{a}_n \\
 \mathbf{b}_2 &= S_{21}\mathbf{a}_1 + S_{22}\mathbf{a}_2 + \dots + S_{2n}\mathbf{a}_n \\
 &\vdots \\
 \mathbf{b}_n &= S_{n1}\mathbf{a}_1 + S_{n2}\mathbf{a}_2 + \dots + S_{nn}\mathbf{a}_n
 \end{aligned}
 \tag{2.104}$$

ovvero, in forma matriciale:

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}] [\mathbf{a}]
 \tag{2.105}$$

I parametri della matrice di diffusione possono essere valutati utilizzando la relazione:

$$S_{ij} = \left(\frac{\mathbf{b}_i}{\mathbf{a}_j} \right)_{\mathbf{a}_k=0 \text{ con } k \neq j}
 \tag{2.106}$$

Quindi, la misura di un parametro di scattering comporta l'annullamento delle onde incidenti a varie bocche. Questa condizione, che corrisponde ad adattare una bocca, è facilmente realizzabile nella tecnica delle microonde anche su ampi intervalli di frequenze.

Nell'ipotesi che tutte le impedenze caratteristiche delle linee di accesso Z_{0i} siano uguali, valgono le seguenti proprietà: per componenti reciproci $S_{ij} = S_{ji}$ che, in forma matriciale diventa: $[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}]^T$; per componenti privi di perdite $[\mathbf{S}]^{T*} \cdot [\mathbf{S}] = [\mathbf{I}]$, con $[\mathbf{I}]$ matrice unitaria e $[\mathbf{S}]^*$ coniugata della matrice $[\mathbf{S}]$ (*).

2.5.d Matrice di trasferimento

La matrice di trasferimento viene utilizzata per caratterizzare reti due porte; essa correla la tensione e la corrente alla porta di ingresso (bocca 1) con la tensione e la corrente alla porta di uscita (bocca 2):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{V}_2 + \mathbf{B}\mathbf{I}_2 \\
 \mathbf{I}_1 &= \mathbf{C}\mathbf{V}_2 + \mathbf{D}\mathbf{I}_2
 \end{aligned}
 \tag{2.107}$$

In forma matriciale la (2.107) diventa:

(*) Se si utilizza la definizione delle onde incidenti e riflesse riportata nella nota di pag. 31 (onde di potenza) queste stesse proprietà valgono anche nel caso in cui le impedenze delle linee di accesso siano diverse.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{pmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

dove la corrente \mathbf{I}_1 è entrante alla bocca 1 mentre la \mathbf{I}_2 è uscente alla bocca 2. Le definizioni dei vari parametri si deducono immediatamente dalla (2.107).

Per componenti reciproci si ha: $AD - BC = 1$; per componenti simmetrici si ha: $AD - BC = 1$ e $A = D$; ed infine in assenza di perdite i parametri A e D sono puramente reali mentre B e C risultano puramente immaginari.

Infine, la matrice di trasferimento di una cascata di reti è ottenibile come il prodotto delle matrici di trasferimento delle singole reti componenti.

2.5.e Parametri immagine

I parametri immagine costituiscono una rappresentazione orientata verso la sintesi di una rete due porte. Essi sono: l'impedenza immagine d'ingresso e di uscita, e l'esponente di trasduzione su base immagine ingresso uscita e uscita ingresso.

L'impedenza immagine d'ingresso z_{i1} (uscita z_{i2}) viene definita come quella particolare impedenza che si vede alla bocca 1 (bocca 2) della rete due porte quando la bocca 2 (bocca 1) è chiusa sulla sua impedenza immagine z_{i2} (z_{i1}). In Fig. 2.16 è rappresentato lo schema per la misura dell'impedenza immagine z_{i1} . Una situazione duale si ha per la definizione di z_{i2} .

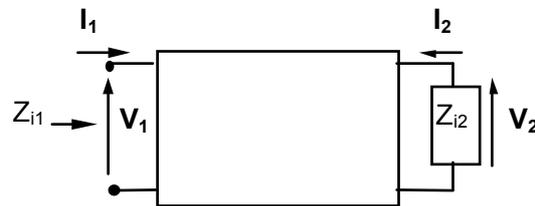


Fig. 2.16

L'esponente di trasduzione su base immagine ingresso uscita γ_{12} (uscita ingresso γ_{21}) è definito come il logaritmo naturale della radice quadrata del rapporto dei prodotti tensione corrente alla bocca 1 e alla bocca 2 (bocca 2 su bocca 1), con quest'ultimo prodotto cambiato di segno, quando la bocca 2 (bocca 1) è chiusa sulla sua impedenza immagine z_{i2} (z_{i1}). Si ha cioè:

$$\gamma_{12} = \ln \sqrt{\frac{\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1}{-\mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2}} \quad (2.109)$$

$$\gamma_{21} = \ln \sqrt{\frac{\mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2}{-\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1}}$$

Per componenti reciproci risulta $\gamma_{12} = \gamma_{21}$; la simmetria del componente comporta $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ e $Z_{i2} = Z_{i1}$; in assenza di perdite le impedenze immagine risultano puramente immaginarie.

Se si considera una cascata di reti due porte, (ad es. 2 reti come in Fig. 2.17) ciascuna chiusa a destra sulla sua impedenza immagine di uscita e a sinistra sulla sua impedenza immagine d'ingresso, si ha che l'impedenza immagine d'ingresso della rete complessiva è pari all'impedenza immagine d'ingresso della prima rete componente la cascata, mentre l'impedenza immagine di uscita è pari all'impedenza immagine di uscita dell'ultima rete. Gli esponenti di trasduzione su base immagine sono dati dalla somma degli esponenti di trasduzione su base immagine delle reti componenti la cascata.

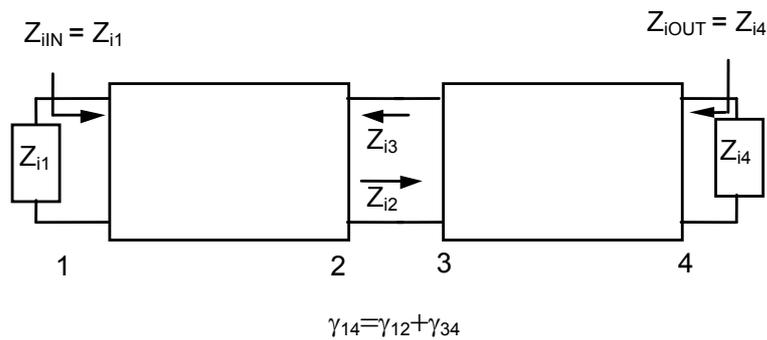


Fig. 2.17

I parametri immagine possono essere correlati ai parametri della matrice di trasferimento. Infatti, con riferimento alla Fig. 2.16, si ha:

$$Z_{i1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2} = \frac{AZ_{i2} + B}{CZ_{i2} + D} \quad (2.110)$$

$$Z_{i2} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{DZ_{i1} + B}{CZ_{i1} + A}$$

Da cui si ricava:

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \quad (2.111)$$

$$Z_{i2} = \sqrt{\frac{BD}{AC}}$$

ed inoltre:

$$\gamma_{12} = \ln \sqrt{\frac{\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1}{-\mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2}} = \ln \left[\sqrt{BC} + \sqrt{AD} \right] \quad (2.112)$$

$$\gamma_{21} = \ln \sqrt{\frac{\mathbf{V}_2 \mathbf{I}_2}{-\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1}} = \ln \left[\frac{\sqrt{BC} + \sqrt{AD}}{AD - BC} \right]$$

Per componenti reciproci la (2.112) diventa:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \cosh^{-1} \sqrt{AD} \quad (2.113)$$

2.6 Linee di trasmissione corte e artificiali

Per linea di trasmissione corta si intende una linea la cui lunghezza l sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda del segnale (ad es. $l < \lambda/12$). Per linea di trasmissione artificiale si intende, invece, una linea costituita da uno o più quadripoli disposti in cascata ognuno formato da impedenze concentrate di valore tale che il comportamento della cascata è identico a quello di una linea a costanti distribuite.

2.6.a Linea corta

L'analisi di una linea corta viene svolta osservando che esiste una forte analogia tra tale linea (Fig. 2.18.a) ed una rete a π (Fig. 2.18.b). Infatti, la matrice di trasferimento per una linea corta con $\vartheta = \beta l$ è del tipo:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\vartheta^2}{2} & jZ_0 \vartheta \\ \frac{j}{Z_0} \vartheta & 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

Mentre per la rete a π si ha:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_1} & Z_2 \\ \frac{2}{Z_1} + \frac{Z_2}{Z_1^2} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

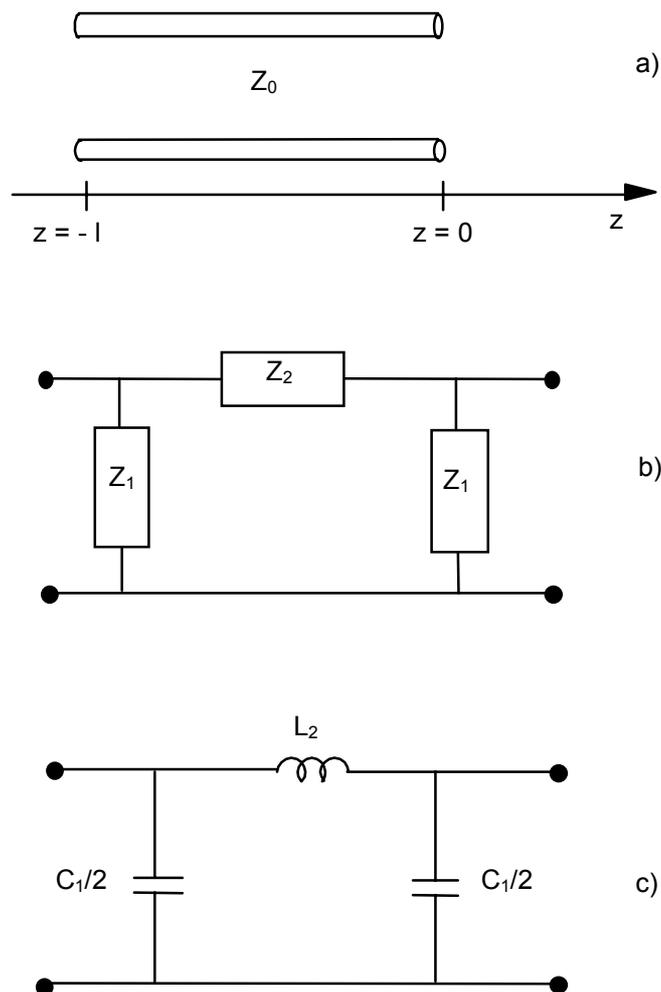


Fig. 2.18

Imponendo l'uguaglianza delle due matrici si ricava:

$$Z_2 = j\omega L_2 = jZ_0 \vartheta = jZ_0 \beta l = jZ_0 \frac{\omega}{c} l \quad (2.116)$$

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega \frac{C_1}{2}} = \frac{1}{jY_0 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{1}{jY_0 \frac{\beta l}{2}} = \frac{1}{jY_0 \frac{\omega l}{c2}}$$

Quindi, se l'impedenza Z_2 è un'induttanza e la Z_1 una capacità con i valori dati dalle (2.116), la rete a π ha la stessa matrice di trasferimento della linea corta. La rete a π che si ottiene è quella mostrata in Fig. 2.18.c nella quale sia l'induttanza serie che la capacità in parallelo sono collegate ai parametri del tratto di linea secondo le relazioni:

$$L_2 = \frac{Z_0 l}{c} = L'l \quad (2.117)$$

$$C_1 = \frac{Y_0 l}{c} = C'l \quad (2.118)$$

con L' e C' induttanza e capacità per unità di lunghezza della linea

2.6.b Linea artificiale

Lo schema di una linea di trasmissione artificiale si presenta come in Fig. 2.19. Si tratta di una cascata di reti a T formate da induttanze serie di valore $L/2$ e capacità in parallelo di valore C .

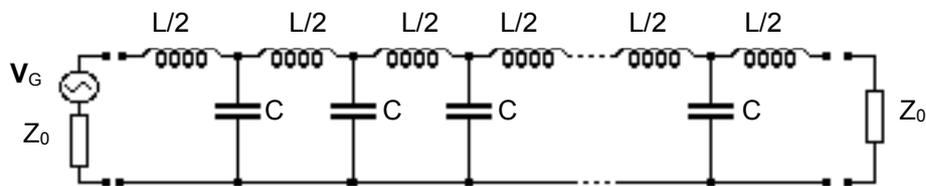


Fig. 2.19

Per comprendere l'analogia tra la linea di trasmissione artificiale e una linea a costanti distribuite, conviene calcolare preliminarmente i parametri immagine sia per un tratto di linea di lunghezza l che per la rete a T.

Si considera quindi una rete due porte costituita da un tratto di linea lungo l di impedenza caratteristica Z_0 e costante di propagazione γ (Fig. 2.20).

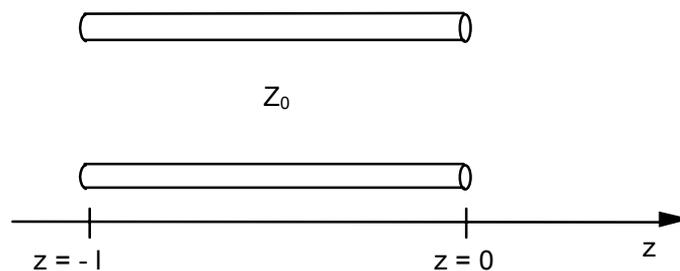


Fig. 2.20

Utilizzando le (2.30)-(2.31) e la (2.107) si trova:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

Applicando le (2.111) - (2.112) si ottiene:

$$z_{i1} = z_{i2} = Z_0 \quad (2.120)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma l$$

Quindi l'impedenza immagine per una linea di trasmissione coincide con la sua impedenza caratteristica e gli esponenti di trasduzione su base immagine coincidono con il prodotto della costante di propagazione per la lunghezza della linea.

Si consideri ora la rete a T riportata in Fig. 2.21.a. Per questa rete risulta:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & 2Z_1 + \frac{Z_1^2}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

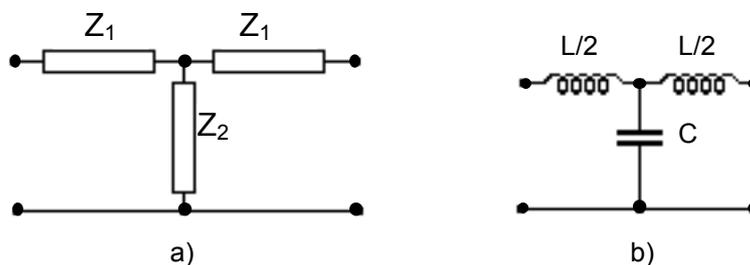


Fig. 2.21

Utilizzando le (2.111)-(2.112) si ottiene:

$$z_{i1} = z_{i2} = \sqrt{Z_1^2 + 2Z_1Z_2} \quad (2.122)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = 2 \cosh^{-1} \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \right)$$

Se si considera il caso in cui l'impedenza \$Z_1\$ è puramente induttiva di valore \$L/2\$ e l'impedenza \$Z_2\$ puramente capacitiva di valore \$C\$ si ha la situazione riportata in Fig. 2.21.b.

In questo caso risulta:

$$Z_{i1} = Z_{i2} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (2.123)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = 2 \cosh^{-1} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \right]$$

dove si è posto $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$.

La pulsazione ω_c è detta pulsazione di cut-off: infatti per $\omega \ll \omega_c$ si ha:

$$Z_{i1} = Z_{i2} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.124)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = j\beta_{12} = j\omega\sqrt{LC}$$

mentre per $\omega \gg \omega_c$ si ha:

$$Z_{i1} = Z_{i2} = j\sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (2.125)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \alpha_{12} + j\beta_{12} = 2 \cosh^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \begin{cases} j(n\pi) \\ j(2n-1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Per frequenze inferiori a quella di cut-off l'impedenza immagine è puramente reale e il coefficiente di trasduzione su base immagine è immaginario puro. Viceversa a frequenze superiori a quella di cut-off l'impedenza immagine diventa puramente immaginaria e l'esponente di trasduzione diventa complesso.

In conclusione, si può dire che per $\omega < \omega_c$ la rete di Fig. 2.19 costituita da una cascata di 'n' reti a T (v. Fig. 2.21) si comporta come una linea di trasmissione lunga l con impedenza caratteristica $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ e costante di fase

$$\beta = \frac{n\omega\sqrt{LC}}{l}.$$

2.7 Teoria dei grafi di flusso

La teoria dei grafi di flusso, sviluppata da S. J. Mason (*), permette di valutare facilmente la funzione di trasferimento tra due punti di una rete comunque complessa.

Data una rete con fissate variabili (onde incidenti e riflesse) definite in vari punti (bocche), si associa a ciascuna di queste variabili un nodo (simbolo •). I nodi sono connessi tra loro da linee orientate secondo la direzione del flusso di potenza (rami)(•-->--•). Ad ogni ramo è associato un valore il quale rappresenta il fattore moltiplicativo che correla le due variabili alle estremità del ramo (nodi).

Si consideri ad esempio un generatore di segnale chiuso su di un carico Z_L ed il corrispondente grafo di flusso (Fig. 2.22).

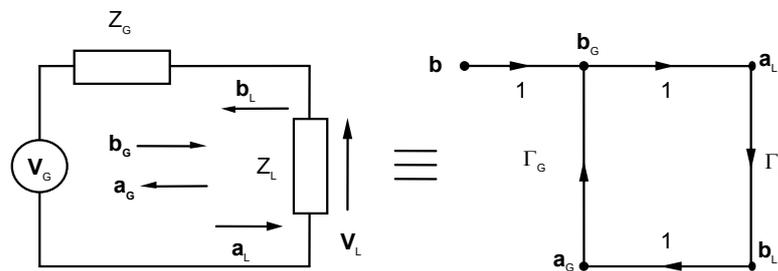


Fig. 2.22

La tensione V_L può essere espressa come:

$$V_L = V_G \frac{Z_L}{Z_L + Z_G} = (a_g + b_g) = b_g (1 + \Gamma_L) \quad (2.126)$$

dove si è posto $\Gamma_L = a_g/b_g$. Esplicitando rispetto a b_g si ottiene:

$$b_g = V_G \frac{Z_L}{Z_L + Z_G} \frac{1}{(1 + \Gamma_L)} = \frac{V_G}{2} \frac{(1 - \Gamma_G)}{(1 - \Gamma_G \Gamma_L)} \quad (2.127)$$

Analizzando ora il grafo di flusso si ha:

$$b_g = b + \Gamma_G a_g = b + \Gamma_G \Gamma_L b_g \quad (2.128)$$

e quindi invertendo:

$$b = (1 - \Gamma_G \Gamma_L) b_g \quad (2.129)$$

sostituendo la (2.127) nella (2.129) si ottiene:

$$b = \frac{V_G}{2} (1 - \Gamma_G) \quad (2.130)$$

(*) S.J. Mason: Proc. IRE, vol. 41, 1144-1156, 1953.

La (2.130) correla la tensione \mathbf{V}_G del generatore all'onda \mathbf{b} .

La funzione di trasferimento tra due punti qualsiasi di un grafo può essere valutata utilizzando una formula proposta da Mason. Prima di enunciarla occorre dare alcune definizioni.

Si dice sentiero (path) una successione di rami tutti ugualmente orientati che toccano i singoli nodi una sola volta. Il valore del sentiero è pari al prodotto dei valori dei singoli rami.

Si dicono anelli (loops) del 1° ordine i percorsi chiusi formati da rami tutti orientati nello stesso verso che toccano i nodi una sola volta. Il valore dell'anello è pari al prodotto dei valori dei singoli rami.

Si dicono anelli del 2° ordine quelli formati da due anelli del 1° ordine senza nodi in comune; il valore dell'anello del 2° ordine è pari al prodotto dei valori dei due anelli del 1° ordine.

Si dicono anelli del 3° ordine quelli formati da tre anelli del 1° ordine senza nodi in comune; il valore dell'anello del 3° ordine è pari al prodotto dei valori dei tre anelli del 1° ordine.

Analogamente per gli ordini successivi.

La funzione di trasferimento che lega tra di loro due nodi (n_1 ed n_2) di un grafo di flusso, secondo la teoria di Mason, è la seguente:

$$T_{12} = \frac{P_1 [1 - \sum^{(1)} L(1) + \sum^{(1)} L(2) - \sum^{(1)} L(3) + \dots] + P_2 [1 - \sum^{(2)} L(1) + \sum^{(2)} L(2) - \dots] + P_3 [\dots]}{1 - \sum L(1) + \sum L(2) - \sum L(3) + \dots} \quad (2.131)$$

con

P_i = valore dell' i -esimo sentiero possibile tra i due nodi in esame.

$\sum L(i)$ = somma di tutti i possibili anelli di ordine i -esimo

$\sum^{(k)} L(i)$ = somma di tutti i possibili anelli di ordine i -esimo senza punti in comune con il k -esimo sentiero.

Ad esempio, con riferimento allo schema di Fig. 2.22, la potenza fornita al carico dal generatore è data da:

$$P_L = \frac{1}{2} (|\mathbf{a}_L|^2 - |\mathbf{b}_L|^2) = \frac{1}{2} |\mathbf{a}_L|^2 (1 - |\Gamma_L|^2) \quad (2.132)$$

dove $\mathbf{a}_L = T \mathbf{b}$ con T funzione di trasferimento tra \mathbf{a}_L e \mathbf{b} . In base alla formula di Mason si ha:

$$T = \frac{1}{1 - \Gamma_G \Gamma_L} \quad (2.133)$$

e quindi, utilizzando anche la 2.130, si ottiene:

$$P_L = \frac{|\mathbf{V}_G|^2}{8Z_0} \frac{|1 - \Gamma_G|^2}{|1 - \Gamma_G \Gamma_L|^2} (1 - |\Gamma_L|^2) \quad (2.134)$$

Questa formula coincide con quella della potenza media ceduta da un generatore ad un carico (Eq. 2.80) applicata nel caso di linea priva di perdite.