

# Capitolo 6

## Filtri a microonde

### 6.1 Introduzione

I filtri sono largamente utilizzati nei sistemi a microonde allo scopo di consentire il transito nel sistema di segnali a frequenze volute e di attenuare fortemente segnali a frequenze indesiderate. I filtri, quindi, si dividono in passa alto, passa basso, passa banda, arresta banda. Un filtro ideale dovrebbe avere attenuazione nulla nella banda passante ed attenuazione infinita nella banda arrestata. Purtroppo un filtro con queste caratteristiche non esiste per cui si deve ricorrere ad alcuni compromessi. Nel seguito, dopo aver richiamato alcune definizioni relative alle reti 2 porte, verrà descritta la tecnica di progetto dei filtri basata sul metodo del passa basso prototipo di riferimento. Infine saranno descritte alcune tecniche per la realizzazione di filtri a microonde su microstriscia.

### 6.2 Attenuazione e Perdita di Riflessione di una rete due porte

Si consideri il seguente circuito costituito da una rete due porte alimentata da un generatore adattato ( $Z_G = 50\Omega$ ) e chiusa su di un carico adattato ( $Z_L = 50\Omega$ ).

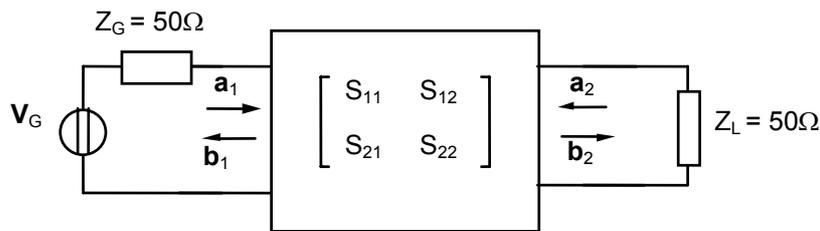


Fig. 6.1

Si definiscono attenuazione e perdita di riflessione le quantità:

$$A_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_I}{P_O} = 10 \log_{10} \frac{P_I}{P_E} + 10 \log_{10} \frac{P_E}{P_O} = A_{RdB} + A_{DdB} \quad (6.1)$$

$$L_{RdB} = 10 \log_{10} \frac{P_I}{P_R} \quad (6.2)$$

dove  $P_I$  è la potenza incidente,  $P_R$  è la potenza riflessa,  $P_E$  è la potenza entrante nella rete,  $P_O$  è la potenza uscente.  $A_{RdB}$  è l'attenuazione per riflessione mentre  $A_{DdB}$  è l'attenuazione per dissipazione.

Con la posizione  $\mathbf{V} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{I} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})/Z_0$  e avendo posto  $Z_G = Z_L = Z_0 = 50\Omega$  si ha:

$$P_I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{V}_I \mathbf{I}_I^*) = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{a}_1|^2 \quad (6.3)$$

$$P_R = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{V}_R \mathbf{I}_R^*) = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{b}_1|^2}{Z_0} = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{a}_1|^2 |S_{11}|^2 \quad (6.4)$$

$$P_E = \frac{1}{2Z_0} (|\mathbf{a}_1|^2 - |\mathbf{b}_1|^2) = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{a}_1|^2 (1 - |S_{11}|^2) \quad (6.5)$$

$$P_O = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{V}_O \mathbf{I}_O^*) = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{b}_2|^2 = \frac{1}{2Z_0} |\mathbf{a}_1|^2 |S_{21}|^2 \quad (6.6)$$

Ne segue che le attenuazioni e la perdita di riflessione possono essere espresse in funzione dei parametri di scattering della rete due porte come:

$$A_{RdB} = 10 \log_{10} \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} \quad (6.7)$$

$$A_{DdB} = 10 \log_{10} \frac{1 - |S_{11}|^2}{|S_{21}|^2} \quad (6.8)$$

$$A_{dB} = 10 \log_{10} \frac{1}{|S_{21}|^2} \quad (6.9)$$

$$L_{RdB} = 10 \log_{10} \frac{1}{|S_{11}|^2} \quad (6.10)$$

### 6.3 Progetto con il metodo del passa basso prototipo di riferimento

Il metodo del passa basso prototipo di riferimento (PBPR), anche noto come metodo della perdita di inserzione, consente un buon controllo delle caratteristiche di ampiezza e fase di un filtro. Se ad esempio è importante avere una bassa attenuazione in banda si può utilizzare una risposta binomiale (vedi Par. 3.2.e), se è importante una pendenza ripida (alta attenuazione fuori banda) si può allora utilizzare una risposta alla Chebyshev. In tutti i casi, il metodo PBPR consente, entro certi limiti, di migliorare le caratteristiche del filtro aumentando il numero di elementi che compongono il filtro stesso.

I filtri sono reti (teoricamente) prive di perdite; quindi si comportano come attenuatori per riflessione. Posto  $S_{11} = \rho e^{j\theta}$  si ha:

$$A_{dB} = A_{RdB} = 10 \log_{10} \frac{1}{1-\rho^2} = 10 \log_{10} P_{LR} \quad (6.11)$$

dove

$$P_{LR} = \frac{1}{1-\rho^2} \quad (6.12)$$

è detto Power Loss Ratio<sup>(\*)</sup>.

Se si considera un segnale  $v(t)$  reale e si indica con  $V(f)$  la sua trasformata di Fourier, risulta  $V(f) = V^*(-f)$  (parte reale pari e parte immaginaria dispari, ovvero modulo pari e fase dispari), lo stesso vale per  $i(t)$  e quindi  $I(f) = I^*(-f)$ . Da queste proprietà risulta anche  $Z(f) = V(f)/I(f) = Z^*(-f)$  e  $\Gamma(f) = \Gamma^*(-f)$ , per cui, in conclusione, si ha che  $\rho$  è una funzione pari di  $\omega$  e a maggior ragione lo è  $\rho^2$ .

Posto:

$$\rho^2 = \frac{M(\omega^2)}{M(\omega^2) + N(\omega^2)} \quad (6.13)$$

ne segue che:

$$P_{LR} = \frac{1}{1-\rho^2} = \frac{1}{1-\frac{M}{M+N}} = \frac{M+N}{M+N-M} = \frac{M+N}{N} \quad (6.14)$$

e quindi:

$$P_{LR} = 1 + \frac{M(\omega^2)}{N(\omega^2)} \quad (6.15)$$

Alle funzioni  $M$  ed  $N$  possono essere assegnati diversi andamenti in funzione della frequenza. Questi andamenti individuano la famiglia del filtro. Nel metodo PBPR inizialmente si considerano  $M$  ed  $N$  funzioni di una pulsazione normalizzata  $\omega'$  (adimensionale).

### 6.3.a Filtri Binomiali o Massimamente Piatti o alla Butterworth

Per questi filtri si sceglie:

$$N(\omega'^2) = 1; \quad M(\omega'^2) = K^2 \omega'^{2N} \quad (6.16)$$

dove  $K^2$  è una costante detta tolleranza del filtro e  $N$  è detto ordine del filtro.

Quindi si ha:

---

(\*) Si noti che per strutture prive di perdite risulta:  $1 - \rho^2 = |S_{21}|^2$  e quindi risulta  $A_{RdB} = A_{dB}$ .

$$P_{LR} = 1 + K^2 \omega'^{2N} \quad (6.17)$$

$$A_{dB} = 10 \log_{10} [1 + K^2 \omega'^{2N}] \quad (6.18)$$

In Fig. 6.2 è riportato l'andamento qualitativo del  $P_{LR}$  per  $N = 1$  e  $N = 2$ .

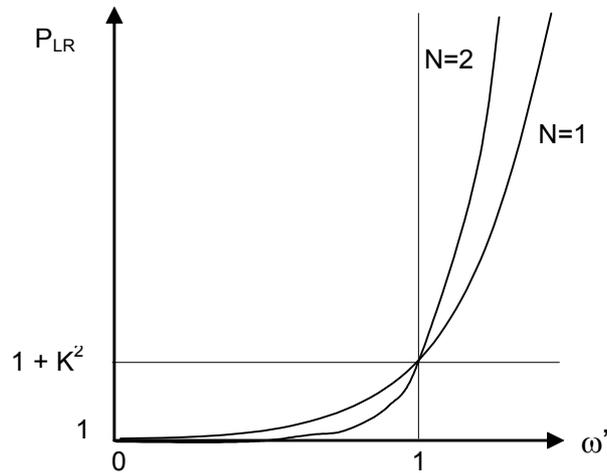


Fig. 6.2

La funzione  $P_{LR}(\omega')$  ha le prime  $(2N - 1)$  derivate uguali a zero per  $\omega' = 0$  e risulta:

per  $\omega' = 1$  (cut-off)

$$P_{LR} = 1 + K^2 \quad (6.19)$$

$$A_{CdB} = 10 \log_{10} (1 + K^2) \quad (6.20)$$

$$K^2 = 10^{A_{C}/10} - 1 \quad (6.21)$$

L'Eq. 6.21 mostra che la tolleranza del filtro ( $K^2$ ) è legata all'attenuazione al cut-off. Ad esempio per  $K = 1$  si ha  $A_{CdB} = 3\text{dB}$ .

per  $\omega' \gg 1$

$$P_{LR} \approx K^2 \omega'^{2N} \quad (6.22)$$

$$A_{dB} \approx 10 \log_{10} K^2 + 10 \log_{10} (\omega'^{2N}) = 10 \log_{10} K^2 + 20 N \log_{10} \omega' \quad (6.23)$$

L'attenuazione aumenta di  $20 N$  dB per decade.  $N$  determina quindi la pendenza del filtro e si sceglie per avere una certa attenuazione fuori banda.

### 6.3.b Filtri a Ripple costante o alla Chebyshev

Per questi filtri si sceglie:

$$N(\omega'^2) = 1; \quad M(\omega'^2) = K^2 T_N^2(\omega') \quad (6.24)$$

dove  $T_N(\omega')$  sono i polinomi di Chebyshev di grado  $N$ :

$$\begin{aligned} T_N(\omega') &= \cos[N \cos^{-1}(\omega')] && \text{per } \omega' < 1 \\ T_N(\omega') &= \cosh[N \cosh^{-1}(\omega')] && \text{per } \omega' \geq 1 \end{aligned} \quad (6.25)$$

I polinomi di Chebyshev godono delle seguenti proprietà:  $T_N(0) = 0$  per  $N$  dispari,  $T_N(0) = 1$  per  $N$  pari,  $T_N$  oscilla tra  $\pm 1$  per  $\omega' < 1$  mentre cresce monotonicamente per  $\omega' > 1$ . Per  $\omega' \gg 1$  vale l'approssimazione:  $T_N^2(\omega') = (1/4)(2\omega')^{2N}$ .

Per questi filtri si ha:

$$P_{LR} = 1 + K^2 T_N^2(\omega') \quad (6.26)$$

$$A_{dB} = 10 \log_{10}[1 + K^2 T_N^2(\omega')] \quad (6.27)$$

In Fig. 6.3 è riportato l'andamento qualitativo del  $P_{LR}$  per  $N=1$  e  $N=2$ .

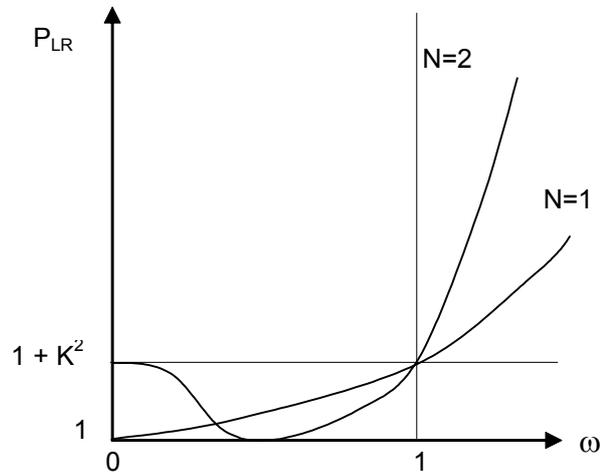


Fig. 6.3

Risulta,

per  $\omega' = 1$  (cut off)

$$P_{LR} = 1 + K^2 \quad (6.28)$$

$$A_{CdB} = 10 \log_{10} (1 + K^2) \quad (6.29)$$

per  $\omega' \gg 1$

$$P_{LR} \approx \frac{1}{4} K^2 (2\omega')^{2N} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} A_{dB} &\approx 10\log_{10}K^2 + 10\log_{10}(\omega'^{2N}) + 10\log_{10}\left(\frac{1}{4}2^{2N}\right) = \\ &= 10\log_{10}K^2 + 20N \log_{10}\omega' + 10\log_{10}\left(\frac{1}{4}2^{2N}\right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

L'attenuazione aumenta di 20 N dB per decade, ma è  $(1/4)(2^{2N})$  volte più grande rispetto a quella del filtro binomiale.

### 6.3.c Formule di trasformazione

Le funzioni che sono state considerate per la risposta del filtro PBPR sono normalizzate in termini di frequenza.

Dal PBPR si passa al passa basso con pulsazione di cut-off data da  $\omega_c$  con la trasformazione:

$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (6.32)$$

Ad esempio, con riferimento ad un filtro binomiale, denormalizzando rispetto alla frequenza, si ottiene:

$$P_{LR} = 1 + K^2 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \quad (6.33)$$

L'andamento qualitativo della risposta per un fissato N è riportato in Fig. 6.4. La figura mostra che per  $\omega = \omega_c$  si ha  $P_{LR} = 1 + K^2$  e, per  $\omega = 0$  si ha  $P_{LR} = 1$ .

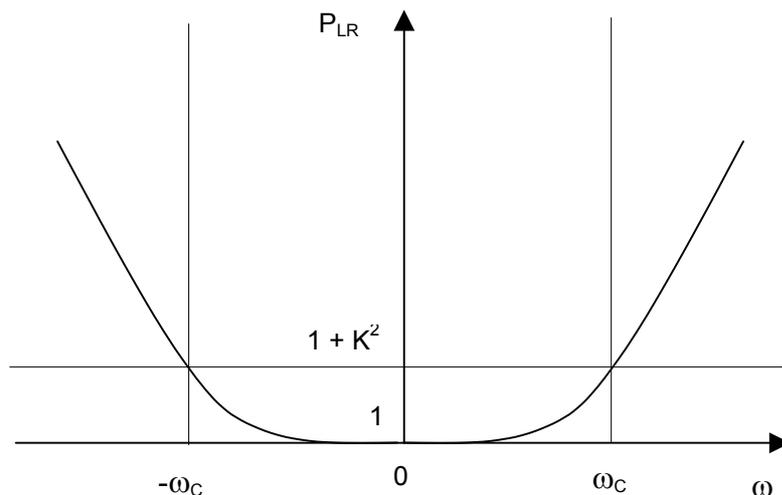


Fig. 6.4

Dal PBPR si passa al passa alto con pulsazione di cut-off data da  $\omega_c$  con la trasformazione:

$$\omega' = -\frac{\omega_c}{\omega} \quad (6.34)$$

Ad esempio con riferimento ad un filtro binomiale si ottiene:

$$P_{LR} = 1 + K^2 \left( -\frac{\omega_c}{\omega} \right)^{2N} \quad (6.35)$$

Una risposta qualitativa del filtro, in funzione della frequenza e per un fissato N è riportata in Fig. 6.5. In questo caso per  $\omega = \infty$  si ha  $P_{LR} = 1$ ; per  $\omega = \omega_c$  si ha  $P_{LR} = 1 + K^2$  ed infine per  $\omega = 0$  si ha  $P_{LR} = \infty$ .

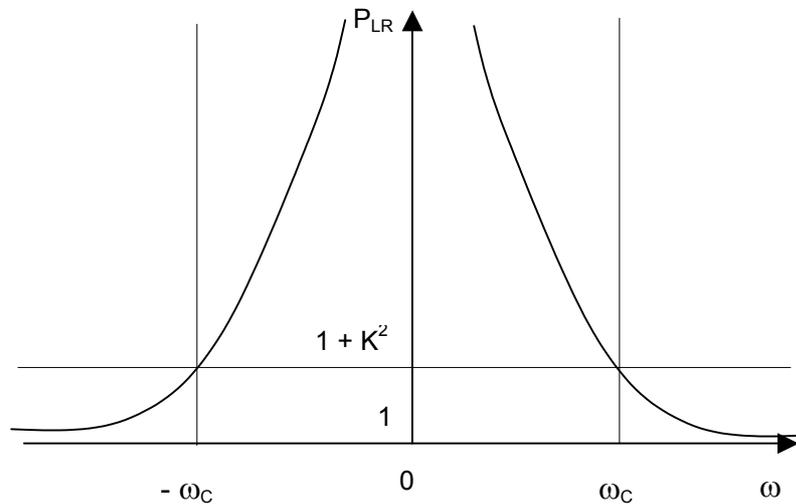


Fig. 6.5

Dal PBPR si passa al passa banda con pulsazione di taglio inferiore data da  $\omega_1$  e pulsazione di taglio superiore data da  $\omega_2$  con la trasformazione:

$$\omega' = \frac{\omega_0}{(\omega_2 - \omega_1)} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (6.36)$$

con  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ , e  $\Delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$ .

Ad esempio con riferimento ad un filtro binomiale si ottiene:

$$P_{LR} = 1 + K^2 \left[ \frac{\omega_0}{(\omega_2 - \omega_1)} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^{2N} \quad (6.37)$$

L'andamento qualitativo in frequenza del filtro per un dato N è riportato in Fig. 6.6.

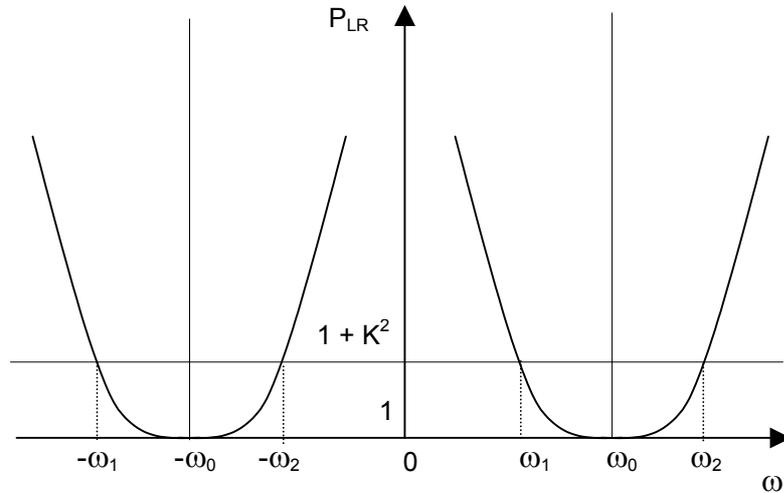


Fig. 6.6

per  $\omega = \omega_0$  si ha  $P_{LR} = 1$

$$\begin{aligned} \text{per } \omega = \omega_2 \text{ si ha } P_{LR} &= 1 + K^2 \left[ \frac{\omega_0}{(\omega_2 - \omega_1)} \left( \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) \right]^{2N} = \\ &= 1 + K^2 \left[ \frac{\omega_0}{(\omega_2 - \omega_1)} \left( \frac{\omega_2^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega_2} \right) \right]^{2N} = 1 + K^2 \end{aligned}$$

per  $\omega = \omega_1$  si ha  $P_{LR} = 1 + K^2$

per  $\omega = 0$  si ha  $P_{LR} = \infty$

Dal PBPR si passa all'arresta banda con pulsazione di taglio inferiore data da  $\omega_1$  e superiore data da  $\omega_2$  con la trasformazione:

$$\omega' = -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^{-1} = -\Delta \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^{-1} \quad (6.38)$$

Quindi, con riferimento ad un filtro binomiale, si ottiene un andamento del tipo:

$$P_{LR} = 1 + K^2 \left[ -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^{-1} \right]^{2N} \quad (6.39)$$

L'andamento in frequenza è mostrato Fig. 6.7.

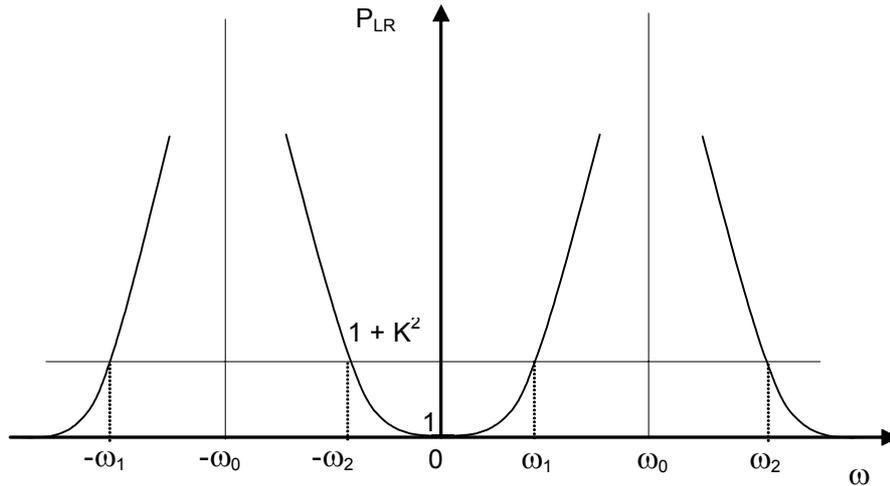


Fig. 6.7

In questo caso per  $\omega = \omega_0$  si ha  $P_{LR} = \infty$ ; per  $\omega = \omega_2$  e  $\omega = \omega_1$  si ha  $P_{LR} = 1 + K^2$ ; per  $\omega = 0$  si ha  $P_{LR} = 1$ .

#### 6.4 Realizzazione circuitale del PBPR

La risposta in frequenza del PBPR può essere ottenuta con dei circuiti elettrici a costanti concentrate realizzati con delle induttanze e delle capacità. Di seguito si riportano due possibili circuiti costituiti da una cascata di induttanze e capacità in numero pari all'ordine del filtro. In particolare si può subito notare che, poiché il circuito deve avere un comportamento tipo passa basso, si hanno sempre induttanze in serie e capacità in parallelo.

La rete di Fig. 6.8, i cui componenti sono quantità normalizzate adimensionali, inizia con un'induttanza in serie.

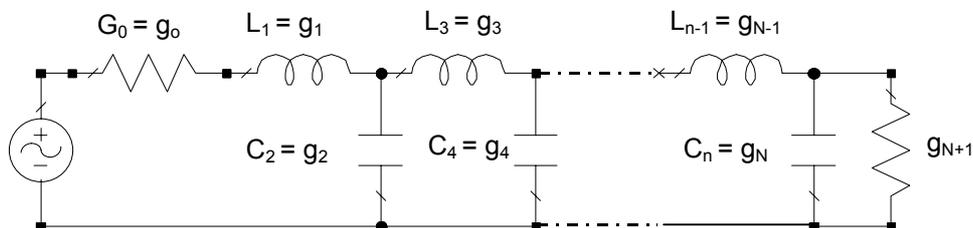


Fig. 6.8

Numerando in maniera progressiva da sinistra verso destra gli elementi con un indice  $k$ , si ha che la rete presenta induttanze per  $k$  dispari e capacità per  $k$  pari, e finisce in due modi diversi (capacità o induttanza) a seconda del

numero totale  $N$  di elementi del filtro. Si può anche notare che nella rete si alternano impedenze e ammettenze; pertanto se  $g_N$  è un condensatore in parallelo (ammettenza)  $g_{N+1}$  è una resistenza; se  $g_N$  è un induttore in serie (impedenza)  $g_{N+1}$  è una conduttanza.

Un altro possibile circuito con il quale si può ottenere una risposta tipo PBPR è quello di Fig. 6.9. In questo caso il primo elemento della rete è una capacità.

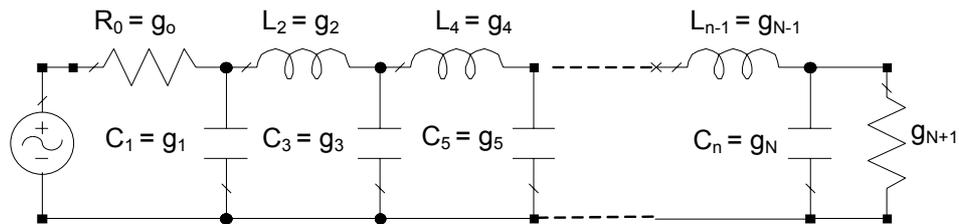


Fig. 6.9

Anche in questo caso tutti i componenti della rete sono quantità normalizzate adimensionali. La rete presenta capacità per  $k$  dispari e induttanze per  $k$  pari, e finisce in due modi diversi (capacità o induttanza) a seconda del valore di  $N$ .

## 6.5 Dimensionamento del PBPR

Le specifiche di progetto di un filtro prevedono, una volta che si sia scelto il tipo di risposta, l'assegnazione di una certa attenuazione fuori banda. Ad esempio per  $\omega' = 2$  si impone che deve essere  $A_{dB} = 20dB$  (per un PB reale vuol dire avere per  $\omega = 2\omega_c$ ,  $A_{dB} = 20dB$ ). Inoltre deve essere assegnata l'attenuazione al cut-off del filtro binomiale ovvero il ripple per il filtro alla Chebyshev. Ad esempio per  $\omega' = 1$  si impone  $A_{dB} = 3dB$  (per un PB reale vuol dire avere per  $\omega = \omega_c$ ,  $A_{CdB} = 3dB$ ).

Per il dimensionamento del filtro si può procedere analiticamente osservando che avere  $A_{CdB}(\omega' = 1) = 3dB$  vuol dire  $K = 1$ ; a questo punto, con riferimento ad un filtro binomiale, si ha  $A_{dB} = 10\log_{10}[1 + (\omega')^{2N}]$  e si può variare per tentativi  $N$  fino ad avere  $A_{dB}(\omega' = 2) > 20dB$ . In questo modo, procedendo per tentativi si trova  $N$ . Infine si possono utilizzare delle formule analitiche presenti in letteratura<sup>(\*)</sup> che, dato  $N$ , consentono di calcolare  $g_0, g_1, \dots, g_{N+1}$ .

Questa procedura è eccessivamente rigorosa e più semplicemente si possono utilizzare dei grafici o delle tabelle.

In particolare il grafico riportato in Fig. 6.10 consente di determinare il numero degli elementi di un filtro binomiale sulla base delle specifiche.

(\*)G.L. Matthaei, L.Young and E.M.T. Jones, Microwave filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures, Artech House, 1980.

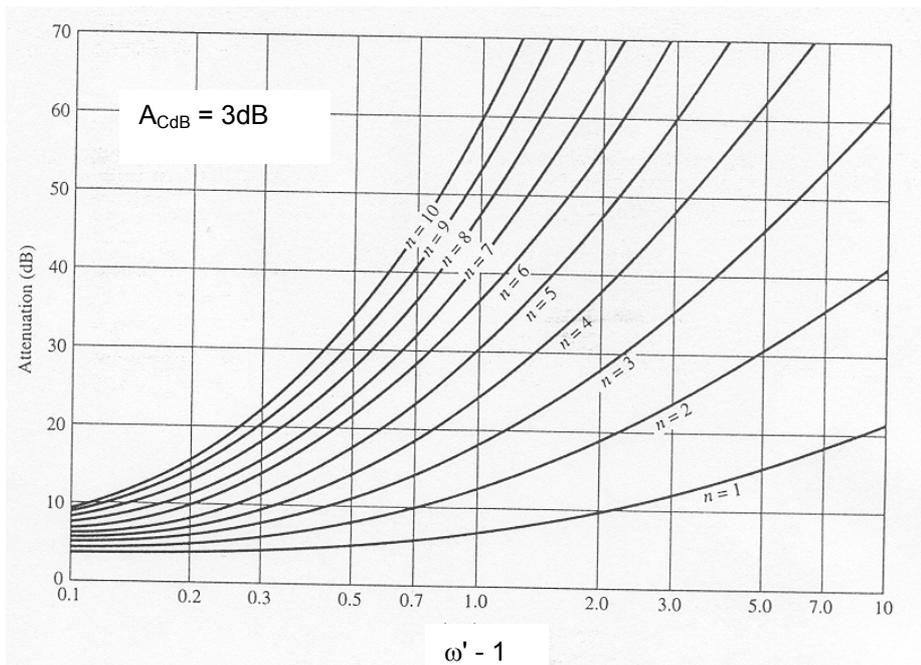


Fig. 6.10

Il grafico in Fig. 6.10 si riferisce al caso  $A_{CdB} = 3dB$ ; su testi specifici, come quello precedentemente citato, se ne trovano di simili per altri valori di  $A_{CdB}$ .

Nell'esempio considerato si ha  $\omega' = 2$  e quindi  $\omega' - 1 = 1^{(*)}$ . Dal grafico di Fig. 6.10 si vede che per avere  $A_{dB} > 20$  dB devo scegliere  $N = 4$ .

Utilizzando la tabella di Fig. 6.11 (valida per  $A_{CdB} = 3dB$ ) si possono ricavare i valori dei 4 elementi reattivi ( $g_1, g_2, g_3, g_4$ ) che compongono il filtro. Per i filtri binomiali risulta sempre  $g_0 = 1$  e  $g_{N+1} = 1$ .

$N$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$
1	2.0000	1.0000									
2	1.4142	1.4142	1.0000								
3	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000							
4	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654	1.0000						
5	0.6180	1.6180	2.0000	1.6180	0.6180	1.0000					
6	0.5176	1.4142	1.9318	1.9318	1.4142	0.5176	1.0000				
7	0.4450	1.2470	1.8019	2.0000	1.8019	1.2470	0.4450	1.0000			
8	0.3902	1.1111	1.6629	1.9615	1.9615	1.6629	1.1111	0.3902	1.0000		
9	0.3473	1.0000	1.5321	1.8794	2.0000	1.8794	1.5321	1.0000	0.3473	1.0000	
10	0.3129	0.9080	1.4142	1.7820	1.9754	1.9754	1.7820	1.4142	0.9080	0.3129	1.0000

Fig. 6.11

(\*) Si noti che in ascisse si riporta una scala trasformata perché si hanno sempre valori di  $\omega' > 1$ .

Se si valuta il  $P_{LR}$  del filtro così ottenuto si trova:

$$P_{LR}(\omega') = 1 + (\omega')^8$$

cioè analoga a quella fissata teoricamente per i filtri binomiali (vedi Eq. 6.17). Un simile approccio può essere utilizzato per il progetto di filtri alla Chebyshev. I corrispondenti grafici e tabelle sono riportati in Fig. 6.12 e Fig. 6.13 per filtri con ripple di 0.5 e 3 dB (figure a e b) rispettivamente.

Per questi filtri si ha  $g_0 = 1$  mentre  $g_{N+1}$  è uguale ad 1 per N dispari ma diverso da 1 per N pari.

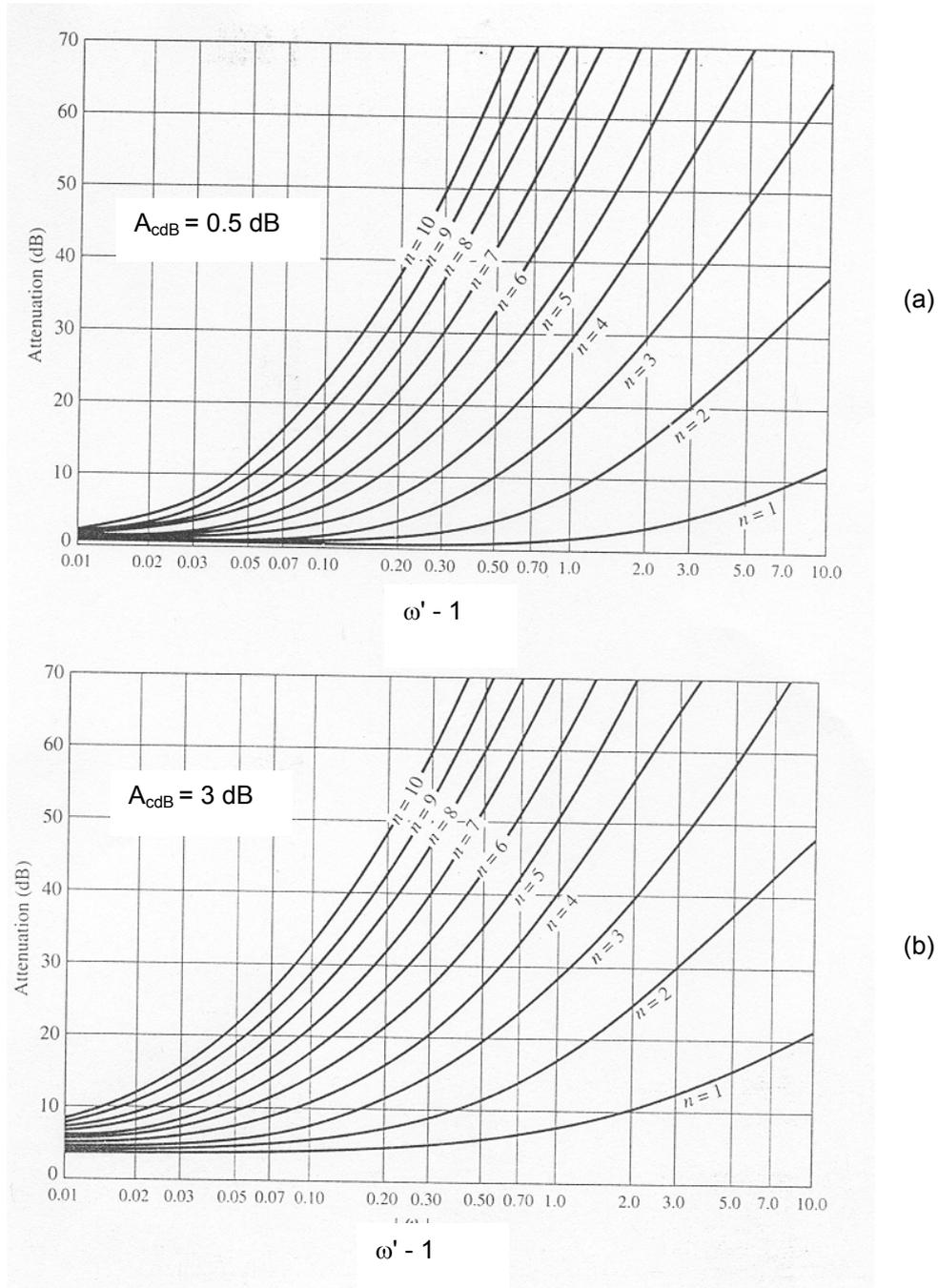


Fig. 6.12

$N$	0.5 dB Ripple										
	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$
1	0.6986	1.0000									
2	1.4029	1.7071	1.9841								
3	1.5963	1.0967	1.5963	1.0000							
4	1.6703	1.1926	2.3661	0.8419	1.9841						
5	1.7058	1.2296	2.5408	1.2296	1.7058	1.0000					
6	1.7254	1.2479	2.6064	1.3137	2.4758	0.5696	1.9841				
7	1.7372	1.2583	2.6381	1.3444	2.6381	1.2583	1.7372	1.0000			
8	1.7451	1.2647	2.6564	1.3590	2.6964	1.3389	2.5093	0.8796	1.9841		
9	1.7504	1.2690	2.6678	1.3673	2.7329	1.3673	2.6678	1.2690	1.7504	1.0000	
10	1.7543	1.2721	2.6754	1.3725	2.7392	1.3806	2.7231	1.3485	2.5329	0.8842	1.9841

(a)

$N$	3.0 dB Ripple										
	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$
1	1.9953	1.0000									
2	3.1013	0.5339	5.8095								
3	3.3487	0.7117	3.3487	1.0000							
4	3.4389	0.7483	4.3471	0.5920	5.8095						
5	3.4817	0.7618	4.5381	0.7618	3.4817	1.0000					
6	3.5045	0.7685	4.6061	0.7929	4.4641	0.6033	5.8095				
7	3.5182	0.7723	4.6386	0.8039	4.6386	0.7723	3.5182	1.0000			
8	3.5277	0.7745	4.6575	0.8089	4.6990	0.8018	4.4990	0.6073	5.8095		
9	3.5340	0.7760	4.6692	0.8118	4.7272	0.8118	4.6692	0.7760	3.5340	1.0000	
10	3.5384	0.7771	4.6768	0.8136	4.7425	0.8164	4.7260	0.8051	4.5142	0.6091	5.8095

(b)

Fig. 6.13

## 6.6 Dimensionamento del filtro reale

Nel circuito del PBPR le reattanze sono adimensionali (normalizzate rispetto a  $R_0$ ). Per ottenere delle quantità fisiche si deve denormalizzare rispetto all'impedenza, oltre che, come già visto, rispetto alla pulsazione. Questa operazione può essere eseguita in due passi successivi. Nel primo passo si denormalizza rispetto all'impedenza e nel secondo rispetto alla frequenza.

La denormalizzazione rispetto all'impedenza si effettua moltiplicando o dividendo il parametro adimensionale per l'impedenza di riferimento  $R_0 = 50\Omega$ :

$$L'_K = R_0 L_K = R_0 g_K \text{ } [\Omega] \quad (6.40)$$

$$C'_K = \frac{C_K}{R_0} = \frac{g_K}{R_0} \text{ } [S] \quad (6.41)$$

$$R'_K = R_K R_0 = g_K R_0 \text{ } [\Omega] \quad (6.42)$$

$$G'_K = \frac{G_K}{R_0} = \frac{g_K}{R_0} \text{ } [S] \quad (6.43)$$

La denormalizzazione rispetto alla frequenza si effettua utilizzando le trasformazioni introdotte nel paragrafo 6.3.4.

### 6.6.a Filtri passa basso

Per il circuito passa basso si ha  $\omega' = \frac{\omega}{\omega_C}$  quindi:

$$X'_K = \omega' L'_K = \frac{\omega}{\omega_C} L'_K \quad [\Omega] \quad (6.44)$$

questo equivale ad avere un'induttanza di valore:

$$L''_K = \frac{L'_K}{\omega_c} = \frac{R_0 L_K}{2\pi f_C} = \frac{R_0 g_K}{2\pi f_C} \quad [H] \quad (6.45)$$

Analogamente si ha:

$$B'_K = \omega' C'_K = \frac{\omega}{\omega_C} C'_K \quad [S] \quad (6.46)$$

e questo equivale ad una capacità

$$C''_K = \frac{C'_K}{\omega_c} = \frac{C_k}{R_0 2\pi f_C} = \frac{g_k}{R_0 2\pi f_C} \quad [F] \quad (6.47)$$

In questo modo sono univocamente determinati i valori di capacità ed induttanza da inserire nella rete del filtro.

### 6.6.b Filtri passa alto

Con riferimento al passa alto si ha:

$$\omega' = -\frac{\omega_C}{\omega} \quad (6.48)$$

da cui segue:

$$X'_K = \omega' L'_K = -\frac{\omega_C}{\omega} L'_K \quad (6.49)$$

Questa reattanza equivale ad una capacità di valore:

$$C_K'' = \frac{1}{L_K' \omega_c} = \frac{1}{R_0 g_K 2\pi f_C} \quad [F] \quad (6.50)$$

Quindi l'induttanza si trasforma in capacità.

Analogamente per la capacità si ha:

$$B_K' = \omega' C_K' = -\frac{\omega_c}{\omega} C_K' \quad (6.51)$$

Questa suscettanza corrisponde a quella di una induttanza, quindi la capacità si trasforma in una induttanza di valore:

$$L_K'' = \frac{R_0}{g_K 2\pi f_C} \quad [H] \quad (6.52)$$

### 6.6.c Filtri passa banda

Con riferimento al passa banda si ha:

$$\omega' = \frac{\omega_0}{(\omega_2 - \omega_1)} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (6.53)$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} X_K' &= \omega' L_K' = \frac{\omega_0}{(\omega_2 - \omega_1)} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) L_K' = \\ &= \frac{\omega L_K'}{\omega_2 - \omega_1} - \frac{\omega_0^2}{\omega_2 - \omega_1} \frac{L_K'}{\omega} = \omega L_K'' - \frac{1}{\omega C_K''} \end{aligned} \quad (6.54)$$

dove:

$$L_K'' = \frac{L_K'}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{R_0 g_K}{\omega_2 - \omega_1} \quad [H] \quad (6.55)$$

e

$$C_K'' = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2 L_K'} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0^2 R_0 g_K} \quad [F] \quad (6.56)$$

quindi l'induttanza si trasforma in una serie di una capacità e di una induttanza.

Dualmente, partendo da:

$$B_K' = \omega' C_K' \quad (6.57)$$

si trova:

$$C_K'' = \frac{g_K}{R_0(\omega_2 - \omega_1)} \quad [F] \quad (6.58)$$

$$L_K'' = \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_0}{\omega_0^2 g_K} \quad [H] \quad (6.59)$$

Quindi la capacità si trasforma nel parallelo di una capacità e di una induttanza<sup>(\*)</sup>.

#### 6.6.d Filtri arresta banda

Con riferimento all'arresta banda si ha:

$$\omega' = -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^{-1} \quad (6.60)$$

e si trova per la reattanza serie:

$$C_K'' = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1) R_0 g_K} \quad [F] \quad (6.61)$$

$$L_K'' = \frac{(\omega_2 - \omega_1) R_0 g_K}{\omega_0^2} \quad [H] \quad (6.62)$$

Quindi l'induttanza in serie del PBPR si trasforma in circuito LC parallelo.

Dualmente il condensatore in parallelo del PBPR si trasforma in un circuito LC serie di valore:

$$L_K'' = \frac{R_0}{g_K(\omega_2 - \omega_1)} \quad [H] \quad (6.63)$$

$$C_K'' = \frac{(\omega_2 - \omega_1) g_K}{\omega_0^2 R_0} \quad [F] \quad (6.64)$$

---

(\*) In tutti i casi risulta  $\omega_0^2 LC = 1$ .

## 6.7 Realizzazione di filtri su microstriscia

I filtri visti finora lavorano bene nelle basse frequenze dove è possibile realizzare i desiderati valori di L e C con elementi concentrati. Alle alte frequenze si realizzano le induttanze e le capacità con elementi distribuiti.

Con riferimento alla tecnologia a microstriscia vi sono diverse possibili realizzazioni per filtri passa basso come ad esempio quelle basate sulle trasformazioni di Richard e identità di Kuroda o quelle che utilizzano linee corte a bassa ed alta impedenza che si comportano come induttanze in serie o capacità in parallelo.

Con altre tecniche è anche possibile realizzare filtri passa alto, passa banda o arresta banda in microstriscia. Queste tecniche, tuttavia, non sono trattate in questo testo e per esse si rimanda a testi specifici come quelli citati in precedenza.

### 6.7.a Trasformazioni di Richard ed Identità di Kuroda

Le trasformazioni di Richard si basano sulle relazioni relative alle impedenze normalizzate di un tratto di linea chiuso in corto circuito o in circuito aperto, rispettivamente:

$$\hat{Z}_{IN} = j\hat{Z}_C \tan(\beta l) = j\hat{Z}_C \tan(\vartheta) \quad (6.65)$$

$$\hat{Y}_{IN} = j\hat{Y}_C \tan(\beta l) = j\hat{Y}_C \tan(\vartheta) \quad (6.66)$$

Nelle 6.65 e 6.66 si può scegliere 'l' in modo tale da ottenere i desiderati valori di  $\hat{Z}_{IN}$  e  $\hat{Y}_{IN}$  e quindi di  $L_K$  e  $C_K$ ; è più opportuno, però, lavorare con linee commensurate cioè con linee aventi tutte la stessa lunghezza (questo rende la risposta del filtro periodica).

Quindi si pone  $l = \frac{\lambda}{8}$  (per  $\omega = \omega_C$ ) da cui segue:

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4} \quad (6.67)$$

e quindi:

$$\tan(\beta l) = 1$$

Per cui scegliendo

$$\hat{Z}_C = L_K = g_K \quad (6.68)$$

$$\hat{Y}_C = C_K = g_K$$

si ha:

$$\hat{Z}_{IN} = jL_K = jg_K \quad (6.69)$$

$$\hat{Y}_{IN} = jC_K = jg_K$$

$\hat{Z}_{IN}$  coincide con l'impedenza normalizzata di un'induttanza di valore  $L_K = g_K$  alla pulsazione normalizzata  $\omega' = 1$  ( $\omega = \omega_C$  per il PB).

$\hat{Y}_{IN}$  coincide con l'ammettenza normalizzata di una capacità di valore  $C_K = g_K$  alla pulsazione normalizzata  $\omega' = 1$  ( $\omega = \omega_C$  per il PB).

Quindi, denormalizzando rispetto all'impedenza  $R_0$  si ha:

$$\begin{aligned} Z_{IN} &= jL_K R_0 \\ Y_{IN} &= \frac{jC_K}{R_0} \end{aligned} \quad (6.70)$$

Queste relazioni quindi dicono che utilizzando dei tratti di linea di lunghezza  $l = \frac{\lambda}{8}$  chiusi su aperti o su corto circuiti con una opportuna impedenza caratteristica (che è legata ai coefficienti  $g_K$  del PBPR) si possono realizzare le induttanze e le capacità del filtro. Ovviamente il circuito risulta equivalente a quello teorico solo per  $\omega' = 1$  ( $\omega = \omega_C$ ); allontanandosi da  $\omega_C$  la risposta differisce da quella del filtro teorico.

Le identità di Kuroda sono quattro. Nel progetto dei filtri su microstriscia interessa quella che permette di trasformare stub serie in stub paralleli. Infatti, come noto, gli stub in parallelo sono più semplici da realizzare in microstriscia.

In particolare si può dimostrare facilmente, confrontando le matrici ABCD dei due circuiti di fig. 6.14, che uno stub serie lungo 'l' con impedenza caratteristica  $Z_1$  e chiuso in corto circuito, seguito da un tratto di linea con impedenza caratteristica  $Z_2$  sempre lungo 'l', è equivalente ad un tratto di linea con impedenza caratteristica  $n^2 Z_1$  con  $n^2 = 1 + Z_2/Z_1$  lungo 'l', seguito da uno stub in parallelo con impedenza caratteristica  $n^2 Z_2$  lungo 'l' e terminato su circuito aperto.

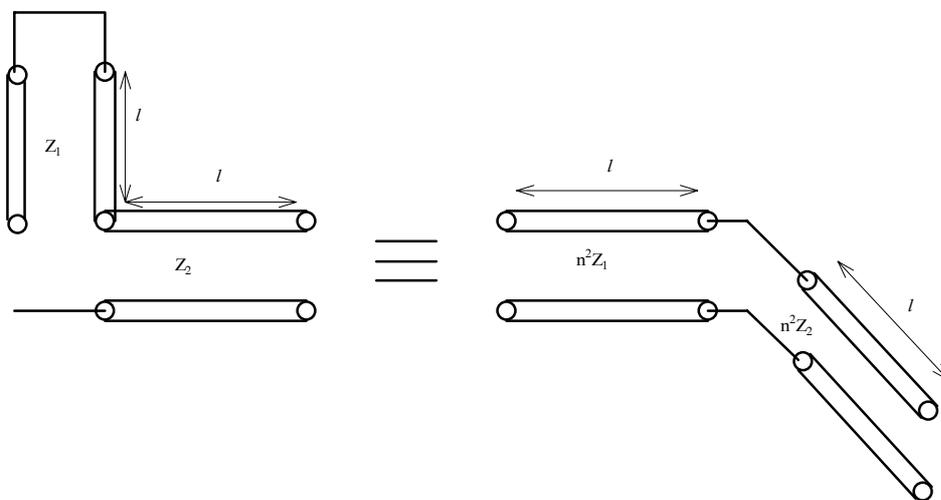


Fig. 6.14

### 6.7.b Progetto di un filtro passa basso mediante step

Una tecnica alternativa per la sintesi di un filtro passa basso è quella di utilizzare una rete a scala. Questa rete si basa sulla proprietà vista nel Par. 3.2.d per cui una linea corta ( $l \ll \lambda/10$ ) chiusa su di un carico con impedenza in modulo molto maggiore di quella caratteristica della linea ( $|Z_L| \gg Z_C$ ) si comporta come una capacità in parallelo al carico e di valore  $C=Y_0 l/c$ . Analogamente una linea corta chiusa su di un carico con impedenza in modulo molto minore di quella caratteristica della linea ( $|Z_L| \ll Z_C$ ) si comporta come una induttanza in serie al carico e di valore  $L=Z_0 l/c$ .

Ad esempio si può supporre per le linee a bassa impedenza  $Z_0 = Z_L$  e per le linee ad alta impedenza  $Z_0 = Z_H$ .

Quindi, con riferimento alla capacità si ha:

$$C = \frac{Y_0 l}{c} = \frac{1}{Z_L} \frac{l}{c} \quad (6.71)$$

Fissato  $Z_L$ , l'unico parametro su cui agire è  $l$ , e si ha:

$$\vartheta = \beta l = \beta C Z_L c = \frac{\omega_C}{c} C Z_L c = \omega_C C Z_L \quad (6.72)$$

ma  $C = \frac{g_k}{R_0 \omega_C}$  e quindi :

$$\beta l = \frac{\omega_C g_k Z_L}{\omega_C R_0} = \frac{g_k Z_L}{R_0} \quad (6.73)$$

Dualmente per le induttanze si trova:

$$\beta l = \frac{g_k R_0}{Z_H} \quad (6.74)$$