Capitolo 11

Oscillatori a microonde

11.1 Introduzione

In questo capitolo sono descritte alcune tecniche per lo studio ed il progetto di oscillatori a stato solido. Inizialmente sono introdotte le condizioni di mantenimento e stabilità delle oscillazioni e alcuni parametri utili a caratterizzare il comportamento degli oscillatori. Nel seguito sono analizzati gli oscillatori utilizzanti transistor divisi in oscillatori a frequenza fissa e oscillatori a frequenza variabile.

11.2 Condizioni di mantenimento e stabilità delle oscillazioni

Gli oscillatori convertono energia da continua in alternata, essi sono costituiti in generale da tre parti: un componente attivo non lineare (Z_D), una struttura risonante che fissa la frequenza di oscillazione ed una transizione per trasferire il segnale al carico (Z_C) (Fig. 11.1).



Fig. 11.1

L'elemento attivo di un oscillatore può essere sempre visto come un componente a resistenza negativa. Quando si usano dei dispositivi a due terminali, come i diodi Gunn o IMPATT, questo comportamento si ottiene semplicemente polarizzando il diodo, mentre per i dispositivi a tre terminali, come i transistor, è necessario aggiungere un'opportuna rete di controreazione.

La struttura risonante è in genere costituita da risonatori dielettrici (v. par. 5.4.a) o ceramici (v. par. 5.4.b), quando sono richieste prestazioni a frequenza fissa; sfere YIG (v. par. 5.4.c) o risonatori ceramici accordati con diodi varactor (v. par. 7.4), quando sono richiesti oscillatori sintonizzabili.

La transizione collega la sorgente al carico e, come sarà chiarito nel seguito, può essere utilizzata per migliorare alcune prestazioni dell'oscillatore.

Il circuito mostrato in Fig. 11.1 può essere ricondotto al circuito di Fig. 11.2.



Fig. 11.2

In questo circuito -R_D e C_D modellano l'elemento attivo ^(*), la rete R, L, C modella il risonatore nell'intorno di una delle sue frequenze di risonanza e tiene conto anche degli eventuali parassiti presenti nel circuito, R_C rappresenta il carico ed e(t) modella le sorgenti di rumore presenti nel circuito.

Nell'ipotesi che il risonatore abbia un fattore di merito Q elevato nel circuito scorrerà una corrente essenzialmente sinusoidale del tipo:

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\cos}(\omega_0 t + \varphi(t)) \tag{11.1}$$

Le oscillazioni nell'ampiezza e nella fase sono connesse alla presenza del generatore e(t) e sono supposte lente rispetto a quelle del segnale i(t).

Applicando la legge di Kirchhoff alle tensioni al circuito di figura e posto $C_T=(C_D \cdot C)/(C_D+C)$ si ottiene:

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R + R_{C} - R_{D}) i(t) + \frac{1}{C_{T}} \int i(t) dt = e(t)$$
(11.2)

essendo:

$$\frac{di(t)}{dt} = -A(t)\left(\omega_0 + \frac{d\phi(t)}{dt}\right)sen(\omega t + \phi(t)) + \frac{dA(t)}{dt}cos(\omega_0 t + \phi(t))$$
(11.3)

$$\int i(t) dt \cong \left(\frac{A(t)}{\omega_0} - \frac{A(t)}{\omega_0^2} \frac{d\phi(t)}{dt}\right) sen(\omega_0 t + \phi(t)) + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{dA(t)}{dt} cos(\omega_0 t + \phi(t))$$
(11.4)

^(*) Si noti che R_D è una resistenza non lineare funzione dell'ampiezza della corrente che scorre nel circuito.

Si noti che l'uguaglianza (11.4) è valida se A(t) e $\varphi(t)$ non variano apprezzabilmente su di un periodo del segnale armonico.

Sostituendo le (11.3)-(11.4) nella (11.2), moltiplicando una volta per sen $(\omega_0 t + \varphi(t))$ e un'altra per cos $(\omega_0 t + \varphi(t))$ ed integrando rispetto a t tra t - T₀ e t, con T₀ periodo delle oscillazioni, si ottiene:

$$\left(-\omega_0 L + \frac{1}{\omega_0 C_T}\right) - \left(L + \frac{1}{\omega_0^2 C_T}\right) \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{2}{A(t)T_0} \int_{t-T_0}^t e(t) \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi(t)) dt \quad (11.5)$$

$$\left(L + \frac{1}{\omega_0^2 C_T}\right) \frac{dA(t)}{dt} + \left(R + R_C - \overline{R}\right) A(t) = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t e(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)) dt$$
(11.6)

dove \overline{R} (resistenza media in un periodo) è una funzione di A(t) ed è data da:

$$\overline{\mathsf{R}} = \frac{2}{\mathsf{A}(t)\mathsf{T}_0} \int_{t-\mathsf{T}_0}^{t} \mathsf{A}(t) \cos^2(\omega_0 t + \varphi(t)) dt$$
(11.7)

In condizioni stazionarie e(t) \approx 0 e quindi dA(t)/dt \approx 0 e d ϕ (t)/dt \approx 0 per cui le (11.5)-(11.6) danno le condizioni di mantenimento delle oscillazioni:

$$R + R_c - \overline{R} = 0 \tag{11.8}$$

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_T} = 0 \tag{11.9}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare studiando il circuito di Fig. 11.2 nel dominio della frequenza complessa p = $-\xi + j\omega$ (senza il generatore di rumore). In questo caso, introdotta la corrente complessa I(p), posto R_T = R + R_C - R_{DL} e applicando la legge di kirchhoff alla maglia e si ottiene ^(*):

$$[R_T + pL + 1/(pC_T)] I(p) = 0$$
(11.10)

Questa equazione ammette soluzioni diverse da zero solo se la parte tra parentesi quadre è nulla e quindi:

$$p^{2}LC_{T} + pC_{T}R_{T} + 1 = 0$$
 (11.11)

che ammette le due soluzioni:

 $^{^{(*)}}$ L'analisi nel dominio della frequenza complessa presuppone anche la sostituzione della resistenza non lineare R_D con la resistenza lineare R_{DL}.

$$p = -\frac{R_{T}}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC_{T}} - \frac{R_{T}^{2}}{2L^{2}}}$$
(11.12)

La corrente del circuito evolve nel tempo come:

$$I(t) = Im \left\{ I(p)e^{pt} \right\} = \hat{I} e^{-\frac{R_T}{2L}t} \operatorname{sen}(\hat{\omega}t + \phi)$$
(11.13)

Per cui, se risulta $R_T = 0$, si hanno oscillazioni di ampiezza costante e la frequenza delle oscillazioni è data da $\omega_0^2 = 1/LC_T$ da cui segue $\omega_0 L - 1/\omega_0 C_T = 0$. Queste ottenute sono relazioni analoghe alle (11.8)-(11.9) (con \overline{R} sostituito da R_{DL}) e sono quindi le condizioni per il mantenimento delle oscillazioni (*).

Le condizioni (11.8)-(11.9) possono essere applicate anche guardando il circuito a destra e sinistra di una qualsiasi sezione. Per cui se si considera la sezione AA' in Fig. 11.2 indicando con Z_D l'impedenza (a parte reale negativa) del dispositivo attivo e con Z_L quella di tutto il circuito passivo (risonatore e carico) si ha per l'impedenza totale Z_T :

$$Z_{\rm T} = Z_{\rm D} + Z_{\rm L} = 0 \tag{11.14}$$

che si spezza in:

$$R_T = -R_{DL} + R_L = 0$$
 (11.15)
 $X_T = X_D + X_L = 0$

Ricondotta ai coefficienti di riflessione Γ_D e Γ_L che si vedono guardando verso il dispositivo attivo e verso il carico la (11.14) diventa:

$$\Gamma_{\rm D} \Gamma_{\rm L} = 1 \tag{11.16}$$

che si spezza in:

$$|\Gamma_{\rm D} \Gamma_{\rm L}| = 1$$

$$\angle \Gamma_{\rm D} + \angle \Gamma_{\rm L} = 2n\pi$$
(11.17)

Quella trovata è la condizione per il mantenimento delle oscillazioni espressa in termini dei coefficienti di riflessione.

 $^{^{(*)}}$ Si noti che se invece del circuito di Fig. 11.2 (serie) si fosse studiato un circuito formato dagli stessi elementi disposti tutti in parallelo si sarebbe giunti alla condizione: $Y_T = Y_D + Y_L = 0$ (condizione di risonanza parallelo). Per il dimensionamento dell'oscillatore si può usare questa condizione o le (11.8) – (11.9) a seconda del comportamento del circuito risonante che può essere serie o parallelo. Negli oscillatori a microonde si ha più spesso a che fare con risonatori modellabili nell'intorno della risonanza con circuiti risonanti parallelo (v. risonatori dielettrici par. 5.4.a, ceramici par. 5.4.b e Yig par. 5.4.c).

Per avere l'innesco delle oscillazioni dovrà essere $R_T < 0$ (condizione di innesco delle oscillazioni). Infatti in questo caso il coefficiente dell'esponenziale nella (11.13) è positivo e le oscillazioni crescono nel tempo (*).

L'analisi svolta ha consentito di definire le condizioni di mantenimento delle oscillazioni in funzione delle impedenze e dei coefficienti di riflessione alle porte dell'oscillatore. Condizioni formalmente analoghe, ma espresse in termini delle funzioni di trasferimento del blocco di guadagno e del blocco di controreazione (condizioni di Barkhausen) sono state ottenute nel par. 2.2, Vol. 2. I due approcci conducono ovviamente agli stessi risultati e si può seguire quello che consente di progettare il particolare oscillatore nel modo più semplice.

Le condizioni viste finora impongono dei vincoli per avere l'innesco ed il mantenimento delle oscillazioni in un circuito. Si vuole ora vedere quali condizioni devono essere verificate affinché le oscillazioni che si instaurano nel circuito siano stabili. Queste condizioni possono essere studiate inserendo nella (11.14) la dipendenza dell'impedenza dell'elemento attivo dall'ampiezza della corrente (I) e dalla pulsazione complessa (s = α + j ω). In questo modo si ottiene:

$$Z_{T}(I, s) = Z_{D}(I, s) + Z_{L}(s) = 0$$
 (11.18)

L'effetto di un piccolo cambiamento δI nella corrente e di un piccolo cambiamento δs nella pulsazione complessa può essere studiato sviluppando la (11.18) nell'intorno del punto di lavoro (I₀, s₀).

In questo modo si ha:

$$Z_{T}(\mathbf{I},\mathbf{s}) = Z_{T}(\mathbf{I}_{0},\mathbf{s}_{0}) + \left(\frac{\partial Z_{T}}{\partial \mathbf{s}}\right)_{\mathbf{s}_{0},\mathbf{I}_{0}} \delta \mathbf{s} + \left(\frac{\partial Z_{T}}{\partial \mathbf{I}}\right)_{\mathbf{s}_{0},\mathbf{I}_{0}} \delta \mathbf{I} = \mathbf{0}$$
(11.19)

Nella (11.19) si ha $Z_T(I_0, s_0) = 0$ (condizione di risonanza iniziale) e $\frac{\partial Z_T}{\partial s} = -j \frac{\partial Z_T}{\partial \omega}$. Quindi dalla (11.19) si ottiene:

$$\delta \mathbf{s} = \delta \alpha + j \delta \omega = -\frac{\left(\frac{\partial Z_{T}}{\partial I}\right)_{\mathbf{s}_{0},\mathbf{l}_{0}}}{\left(\frac{\partial Z_{T}}{\partial \mathbf{s}}\right)_{\mathbf{s}_{0},\mathbf{l}_{0}}} \delta \mathbf{I} = -j \frac{\left(\frac{\partial Z_{T}}{\partial I}\right) \left(\frac{\partial Z_{T}}{\partial \omega}\right)}{\left|\frac{\partial Z_{T}}{\partial \omega}\right|^{2}} \delta \mathbf{I}$$
(11.20)

Affinché un transitorio causato da una variazione δI o $\delta \omega$ possa decadere deve essere $\delta \alpha$ < 0 quando δI > 0 e quindi:

^(*) Si noti cha dalla condizione $R_T < 0$ può discendere sia $|\Gamma_D \Gamma_L| < 1$ (se $|R_D| > R_L > Z_0$) che $|\Gamma_D \Gamma_L| > 1$ (se $Z_0 > |R_D| > R_L$). Analogamente dalla condizione $G_T < 0$ discende $|\Gamma_D \Gamma_L| < 1$ (se $|G_D| > G_L > Y_0$) oppure $|\Gamma_D \Gamma_L| > 1$ (se $Y_0 > |G_D| > G_L$)

$$\operatorname{Im}\left\{\!\left(\frac{\partial Z_{\mathsf{T}}}{\partial \mathsf{I}}\right)\!\left(\frac{\partial Z_{\mathsf{T}}^{\star}}{\partial \omega}\right)\!\right\}\!<\!0$$

che sviluppata porta a:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{I}} \frac{\partial \mathbf{X}_{\mathrm{T}}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{X}_{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{I}} \frac{\partial \mathbf{R}_{\mathrm{T}}}{\partial \omega} > 0 \qquad (11.21)$$

Per un carico passivo risulta: $\frac{\partial R_L}{\partial I} = \frac{\partial X_L}{\partial I} = \frac{\partial R_L}{\partial \omega} = 0$ per cui la (11.21) diventa:

$$\frac{\partial R_{\rm D}}{\partial l} \frac{\partial (X_{\rm D} + X_{\rm L})}{\partial \omega} - \frac{\partial X_{\rm D}}{\partial l} \frac{\partial R_{\rm D}}{\partial \omega} > 0 \qquad (11.22)$$

Per avere oscillazioni stabili deve essere verificata la (11.22) e quindi deve essere:

$$\frac{\partial R_{\rm D}}{\partial l} > 0 \tag{11.23}$$

$$\frac{\partial (X_{D} + X_{L})}{\partial \omega} >> 0$$
 (11.24)

Quindi per garantire delle oscillazioni stabili in ampiezza ed in frequenza serve un elemento attivo la cui resistenza verifichi la (11.23) ed un circuito risonante con un alto fattore di merito Q (v. Eq. (2.70)).

A titolo di esempio, il punto di lavoro dovrà presentarsi come il punto C ($C_R e C_I$) in Fig. 11.3.a e 11.3.b.



Fig. 11.3

In particolare, l'andamento della R_D in funzione della corrente dovrà essere come in Fig. 11.3.a $\left(\frac{\partial R_D}{\partial l} > 0\right)$ e quello della X_L in funzione della frequenza come in Fig. 11.3.b $\left(\frac{\partial X_L}{\partial \omega} >> 0\right)$.

In questo modo, per un prefissato valore di R_L, essendo inizialmente I = 0, risulta R_D > R_L (condizione di innesco delle oscillazioni) le oscillazioni del dispositivo aumentano di ampiezza finché non risulta R_D = R_L (punto C_R in Fig. 11.3.a). Il punto di lavoro C_R è stabile in ampiezza, infatti se l'ampiezza delle oscillazioni, per una qualsiasi causa, si riduce, si ha R_D > R_L e quindi l'ampiezza delle oscillazioni aumenta riportando il sistema nel punto C_R. Analogamente, se l'ampiezza delle oscillazioni aumenta si ha R_D < R_L e di nuovo il sistema tende a ritornare nel punto C.

Allo stesso modo il punto di lavoro C_I è anche stabile in frequenza, infatti se per una qualsiasi causa cambia qualche parametro del circuito basta una piccola variazione della frequenza per provocare una forte variazione di reattanza e quindi per ripristinare la condizione di oscillazione. Ad esempio se per effetto della temperatura o dell'invecchiamento dei componenti X_D si riduce una piccola riduzione di frequenza determina una forte riduzione di X_L e quindi il ripristino della condizione di risonanza (11.15).

11.3 Condizioni di mantenimento delle oscillazioni per una rete n porte

In una forma più generale un oscillatore può essere visto come un componente attivo ad n bocche collegato con un componente passivo anch'esso ad n bocche (Fig. 11.4).



Fig. 11.4

Per i componenti ad n bocche risulta conveniente l'analisi tramite la matrice di scattering che lega le onde incidenti e riflesse alle varie bocche. Con riferimento alla Fig. 11.4 si ha:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \mathbf{a} \tag{11.25}$$

$$b' = [S] a'$$
 (11.26)

Quando i due componenti sono connessi risulta:

$$b' = a$$
 e $b = a'$ (11.27)

Combinando le (11.25)-(11.27) si ha:

$$([S] [S'] - [I]) [a']$$
 (11.28)

con [I] matrice unitaria diagonale. Per avere oscillazioni deve essere $[a'] \neq 0$ e quindi:

$$det([S] [S']-[I]) = 0$$
(11.29)

Quella così ottenuta rappresenta la condizione di mantenimento delle oscillazioni per un oscillatore ad n porte.

Vediamo ora un esempio con riferimento ad una rete attiva a due porte caricata con due impedenze passive (Fig. 11.5).



Fig. 11.5

In questo caso si ha:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{S}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_2 \end{bmatrix} \qquad (11.30)$$

la condizione di mantenimento delle oscillazioni (11.29) diventa:

det
$$\begin{bmatrix} S_{11}\Gamma_1 - 1 & S_{12}\Gamma_2 \\ S_{21}\Gamma_1 & S_{22}\Gamma_2 - 1 \end{bmatrix} = 0$$
 (11.31)

e quindi:

$$(S_{11}\Gamma_1 - 1)(S_{22}\Gamma_2 - 1) - S_{21}\Gamma_1 S_{12}\Gamma_2 = 0$$
(11.32)

che ammette le due soluzioni:

$$\frac{1}{\Gamma_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_2}{1 - S_{22}\Gamma_2} = \Gamma_{\rm IN}$$
(11.33)

$$\frac{1}{\Gamma_2} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_1}{1 - S_{11}\Gamma_1} = \Gamma_{OUT}$$
(11.34)

Dalla (11.33) discende la già trovata condizione di mantenimento delle oscillazioni (11.16) che in questo caso si scrive:

$$\Gamma_{\rm IN}\Gamma_{\rm 1} = 1 \qquad \begin{cases} |\Gamma_{\rm IN}| |\Gamma_{\rm 1}| = 1 \\ \angle \Gamma_{\rm IN} + \angle \Gamma_{\rm 1} = 2n\pi \end{cases}$$
(11.35)

Analoghe relazioni, con riferimento a Γ_{OUT} e Γ_2 possono essere ottenute a partire dalla (11.34). Si noti che, essendo i due carichi Γ_1 e Γ_2 passivi e quindi con modulo minore di uno, per l'innesco delle oscillazioni dovranno essere $|\Gamma_{IN}|$ e $|\Gamma_{OUT}|$ maggiori di uno.

Infine si può dimostrare (*) che se risulta $|\Gamma_{IN}| > 1$ necessariamente deve essere $|\Gamma_{OUT}| > 1$. Inoltre, se la condizione di innesco delle oscillazioni è soddisfatta ad una porta è automaticamente soddisfatta anche all'altra.

11.4 Analisi delle oscillazioni con il criterio di Nyquist

Quelle viste finora sono condizioni per il mantenimento delle oscillazioni ad una prefissata frequenza espresse in termini di impedenze e coefficienti di riflessione. Come visto in precedenza, queste tecniche possono in alcuni casi essere ambigue (si vedano le note sulle condizioni di risonanza a pag. 324 e 325) inoltre, è spesso utile verificare cosa succede al variare della frequenza per verificare se nel circuito sono presenti altre frequenze di oscillazione.

Un metodo rigoroso per studiare la stabilità e l'instabilità di un circuito è basato sul criterio di Nyquist. Questo criterio è già stato introdotto ed utilizzato per l'analisi della stabilità degli amplificatori (v. par. 10.3.c) ma può essere anche utilizzato per l'analisi dell'instabilità degli oscillatori.

^(*) R. E. Collin "Foundation for microwave engineering" McGraw-Hill, 1992

In base al criterio di Nyquist, detto P_{CH} (≥ 0) il numero dei poli con parte reale positiva della funzione di trasferimento a catena chiusa, P_{AP} (≥ 0) quello dei poli con parte reale positiva della funzione di trasferimento a catena aperta e N_g il numero dei giri che la funzione di trasferimento a catena aperta compie nel diagramma polare intorno al punto critico (1, j0), (considerati positivi in senso orario e negativi in senso antiorario), il sistema a catena chiusa è instabile se e solo se:

$$P_{CH} = P_{AP} + N_g > 0$$
 (11.36)

Se la rete a catena aperta è stabile ($P_{AP} = 0$), deve essere $N_g > 0$ (criterio ridotto).

Come visto in precedenza un oscillatore a microonde può essere visto come l'unione di un dipolo attivo (dispositivo: D) collegato ad un risonatore passivo (carico: C) (Fig. 11.6)



Fig. 11.6

In questo circuito come funzione di trasferimento a catena aperta si può utilizzare il prodotto $\Gamma_D \Gamma_C$ (v. Eq. (10.23)); tale prodotto può essere facilmente valutato con i sistemi CAD presenti sul mercato tramite l'utilizzo di un modello di circolatore ideale inserito nel punto del circuito da esaminare, secondo lo schema di Fig. 11.6. Il grafico di $\Gamma_D \Gamma_C$ nel diagramma polare consente di applicare il criterio di Nyquist generale ove si conoscano i poli con parte reale positiva della funzione di trasferimento a catena aperta $\Gamma_D \Gamma_C$ (dovuti eventualmente a Γ_D relativo alla parte attiva). Qualora tali poli non esistano il criterio può essere applicato nella forma ridotta.

Per verificare l'affidabilità della procedura indicata si considerino i due circuiti di Fig. 11.7 e 11.8. Nel primo caso si ha $R_D = -40 \ \Omega \ e \ R_L = 30 \ \Omega$, mentre nel secondo si ha $R_D = -70 \ \Omega \ e \ R_L = 60 \ \Omega$. In base alla condizione d'innesco delle oscillazioni ($R_T < 0$) entrambe questi circuiti sono in grado di oscillare. Tuttavia, come evidenziato nella nota di Pag. 325 in un caso si ha $|\Gamma_D \ \Gamma_C| > 1$ e nell'altro $|\Gamma_D \ \Gamma_C| < 1$. Per studiare questi circuiti con il criterio di Nyquist si dispone il circolatore tra l'elemento attivo ed il risonatore. In queste condizioni si può dimostrare che la funzione di trasferimento a catena aperta ($\Gamma_D \ \Gamma_C$) non ha poli nel semipiano destro. I plot di Nyquist si presentano come in Fig. 11.9.a e 11.9.b.



Fig. 11.7



Fig. 11.8



(a)

(b)

Fig. 11.9

In entrambi casi il plot di Nyquist ruota intorno al punto critico (1 + j0) e quindi prevede correttamente l'instabilità del circuito. Sul plot di Nyquist è anche possibile valutare la frequenza di oscillazione del circuito (in questo caso $f = 1/2\pi\sqrt{LC} = 1.252 \text{ GHz}$) che coincide con la frequenza a cui il plot attraversa l'asse positivo delle ascisse.

Si noti che se si fosse messo il circolatore come in Fig. 11.10.a si sarebbe ottenuto il grafico di Fig. 11.10.b. In questo caso il plot di Nyquist non gira intorno al punto critico (1 + j0) tuttavia il circuito è sempre un circuito oscillante (la condizione non può dipendere dal punto di osservazione).



Fig. 11.10

In questo caso, infatti, la funzione di trasferimento $\Gamma_D \Gamma_C$ ha dei poli a parte reale positiva (dovuti al fato che R_D + Z₀ < 0) quindi la funzione di trasferimento a catena aperta ha dei poli con parte reale positiva e il circuito è instabile anche con N_G = 0.

Come mostrato in Fig. 11.10, anche in questo caso, la frequenza a cui i plot di Nyquist attraversa l'asse reale positivo fornisce la frequenza di oscillazione del circuito.

Quindi, in conclusione, se si ha l'accortezza di posizionare il circolatore tra l'elemento attivo ed il risonatore, il plot di Nyquist fornisce l'andamento in frequenza della funzione di trasferimento a catena aperta e le frequenze di risonanza sono fornite dalla frequenza a cui il plot di Nyquist intercetta l'asse reale positivo.

11.5 Parametri degli oscillatori

Lo spettro di potenza in uscita di un oscillatore a microonde si presenta, tipicamente, come in Fig. 11.11. Dallo spettro è possibile ricavare informazioni sulla frequenza e sulla potenza della fondamentale e delle sue armoniche. Ad esempio in Fig. 11.16 è riportato un possibile spettro per un oscillatore che opera alla frequenza di 2 GHz con una potenza di circa 12 dBm. Si evidenziano anche le prime 6 armoniche con potenze comprese tra -1 e 4 dBm.



Fig. 11.11

Un altro parametro importante per valutare la bontà di un oscillatore è il rumore che si presenta in uscita. Un'analisi dettagliata del rumore negli oscillatori è stata condotta nel par. 2.7, Vol. 2. Ora si vogliono richiamare soltanto le conclusioni più importanti. Essendo l'oscillatore un dispositivo non lineare il rumore generato al suo interno modula il segnale di uscita. Il rumore in particolare può agire sull'ampiezza del segnale (modulazione di ampiezza - rumore AM) o sulla frequenza (modulazione di frequenza - rumore FM). Il rumore determina l'allargamento dello spettro in frequenza dell'oscillatore. Questo spettro, che idealmente dovrebbe essere costituito da una riga a frequenza f₀ si allarga e si generano delle bande laterali. Negli oscillatori a transistor sono presenti in generale due tipi di sorgenti di rumore: quelle dovute al rumore flicker e quelle dovute al rumore termico. Entrambe queste sorgenti modulano in ampiezza ed in frequenza l'uscita dell'oscillatore.

Per caratterizzare il rumore si utilizza un parametro detto "Rumore di fase in banda laterale singola" o anche "Single Sideband to Carrier Ratio (SSCR)" definito come il rapporto tra la potenza di rumore in una banda laterale (tipicamente di 1 Hz) a distanza f_d dalla portante e la potenza della portante:

$$SSCR(f_d) = \frac{N}{C}$$
(11.37)

che espressa in dB diventa:

$$SSCR_{dB} = N_{dB} - C_{dB}$$
(11.38)

Questo parametro si misura in dBc/Hz cioè deciBell sotto la portante per Hz. In Fig. 11.12 è mostrato un possibile spettro per le bande laterali.



Fig. 11.12

Un altro utile parametro per caratterizzare gli oscillatori è l'efficienza di conversione DC-RF o rendimento definito come:

$$\eta = \frac{\text{Potenza generata dall'oscillatore a radiofrequenza}}{\text{Potenza fornita dall'oscillatore in continua}}$$
(11.39)

11.6 Oscillatori a transistor

Gli oscillatori possono essere realizzati a partire da dispositivi a tre terminali (transistor) o da dispositivi a due terminali (diodi). Nel seguito verrà posta l'attenzione sugli oscillatori a transistor, tuttavia alcune delle problematiche affrontate possono essere estese anche al caso degli oscillatori a diodi.

Una caratteristica peculiare degli oscillatori a microonde è che a queste frequenze non possono essere trascurati gli elementi parassiti dei transistor ed in particolare quelli che determinano un feedback tra l'ingresso e l'uscita. Nel progetto degli oscillatori questi elementi sono utilizzati come parte integrante della rete di controreazione, per cui la rete di controreazione "esterna" può essere notevolmente semplificata rispetto al caso a bassa frequenza (v. par. 2.4, Vol. 2). Proprio per questo motivo, volendo svolgere uno studio qualitativo del progetto di un oscillatore risulta, alle alte frequenze, più semplice vedere il transistor controreazionato come un componente a "resistenza negativa".

A partire da un transistor visto come elemento a tre terminali vi sono molti modi per applicare un feedback e ottenere un comportamento a resistenza negativa. Due delle tecniche maggiormente utilizzate sono riportate in Fig. 11.13.

In Fig. 11.13.a si utilizza un transistor nella configurazione source comune (emettitore comune) con un feedback capacitivo sul source, nella Fig. 11.13.b si utilizza un transistor nella configurazione gate comune (base comune) con feedback induttivo sul gate (si veda A. Sweet opera citata).

Nel seguito verrà affrontato in dettaglio lo studio di un oscillatore utilizzante un transistor nella configurazione a source comune (Fig. 11.14). La struttura è simile a quella descritta in Fig. 11.13.a con l'aggiunta di una rete di transizione. Lo studio di questa configurazione può essere affrontato in maniera semplice introducendo la caratterizzazione del transistor come componente a tre bocche.



Fig. 11.13



Fig. 11.14

11.6.a Caratterizzazione di un transistor come componente a tre bocche.

Visto come componente a tre bocche il transistor si presenta come in Fig. 11.15.



Fig. 11.15

Come si vede le bocche di accesso sono definite tra i tre terminali di gate, drain e source e la terra. La matrice di scattering che si ottiene è del tipo:

.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{1} \\ \mathbf{b}_{2} \\ \mathbf{b}_{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1} \\ \mathbf{a}_{2} \\ \mathbf{a}_{3} \end{pmatrix}$$
(11.40)

Data la particolare configurazione si può dimostrare (vedi Collin opera citata) che risulta:

$$\begin{split} &\sum_{j=1}^{3} S_{ij} = 1 & i = 1,2,3 \\ &\sum_{i=1}^{3} S_{ij} = 1 & j = 1,2,3 \end{split} \tag{11.41}$$

Lo stesso transistor può essere visto anche come componente a due bocche (Fig. 11.16). In particolare, per generalità, si studierà un transistor in configurazione source comune con un'impedenza tra il terminale di source e la massa.

La matrice di scattering del componente a due bocche può essere ricavata a partire da quella del 3 bocche utilizzando il grafo di flusso riportato in Fig. 11.17.

Essendo:

$$S'_{11} = \left(\frac{b'_1}{a'_1}\right)_{a'_2=0}$$
 (11.42)

si ricava:

$$S_{11}' = \frac{S_{11}(1 - S_{33}\Gamma_3) + S_{31}\Gamma_3S_{13}}{1 - S_{33}\Gamma_3} = S_{11} + \frac{S_{31}\Gamma_3S_{13}}{1 - S_{33}\Gamma_3}$$
(11.43)



Fig. 11.16



Fig. 11.17

Procedendo in maniera analoga per gli altri parametri si ottiene complessivamente:

$$\begin{pmatrix} S_{11}' & S_{12}' \\ S_{21}' & S_{22}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} + \frac{S_{31}\Gamma_3S_{13}}{1 - S_{33}\Gamma_3} & S_{21} + \frac{S_{32}\Gamma_3S_{13}}{1 - S_{33}\Gamma_3} \\ S_{21} + \frac{S_{31}\Gamma_3S_{23}}{1 - S_{33}\Gamma_3} & S_{22} + \frac{S_{32}\Gamma_3S_{23}}{1 - S_{33}\Gamma_3} \end{pmatrix}$$
(11.44)

In particolare se il terminale di source è posto direttamente a massa ($\Gamma_3 = -1$) si ottiene:

$$\begin{pmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} + \frac{S_{31}S_{13}}{1 - S_{33}} & S_{21} + \frac{S_{32}S_{13}}{1 - S_{33}} \\ S_{21} + \frac{S_{31}S_{23}}{1 - S_{33}} & S_{22} + \frac{S_{32}S_{23}}{1 - S_{33}} \end{pmatrix}$$
(11.45)

E' anche possibile la procedura opposta per cui si passa dalla matrice di scattering del 2 bocche a quella del 3 bocche sfruttando le 4 relazioni (11.45) e le ulteriori 6 relazioni (11.41).

Le formule per il passaggio sono riportate in Tab 11.1 (vedi Collin opera citata).

Tab. 11.1

$$S_{11} = S_{11}' + \frac{(1 - S_{11}' - S_{12}') \cdot (1 - S_{12} - S_{22} - S_{21}')}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

$$S_{12} = S_{12}' + \frac{(1 - S_{11}' - S_{12}') \cdot (1 - S_{22}' - S_{21}')}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

$$S_{13} = \frac{2 \cdot (1 - S_{11}' - S_{12}')}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

$$S_{21} = S_{21}' + \frac{(1 - S_{22}' - S_{21}') \cdot (1 - S_{11}' - S_{21}')}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

$$S_{22} = S_{22}' + \frac{(1 - S_{22}' - S_{21}') \cdot (1 - S_{22}' - S_{21}')}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

$$S_{23} = \frac{2 \cdot (1 - S_{22}' - S_{21}')}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

$$S_{31} = \frac{2 \cdot (1 - S_{22}' - S_{21}')}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

$$S_{32} = \frac{2 \cdot (1 - S_{22}' - S_{21}')}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

$$S_{32} = \frac{2 \cdot (1 - S_{22}' - S_{21}')}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

$$S_{32} = \frac{2 \cdot (1 - S_{22}' - S_{21}')}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

$$S_{33} = \frac{S_{11}' + S_{12}' + S_{12}' + S_{22}' + S_{21}'}{4 - S_{11}' - S_{12}' - S_{22}' - S_{21}'}$$

E' interessante osservare che una volta ricavata la matrice di scattering del 3 bocche a partire da quella del due bocche in configurazione source comune è anche possibile ricavare la matrice di scattering del due bocche nelle configurazioni drain comune e gate comune. La configurazione a Source comune è tipicamente utilizzata negli oscillatori di potenza, quella a gate comune negli oscillatori a larga banda.

11.7 Oscillatori a frequenza fissa

Gli oscillatori a frequenza fissa sono utilizzati come oscillatori locali in sistemi di comunicazione e radar. In questo tipo di oscillatori l'elemento risonante è a frequenza fissa. Allo stato attuale vengono generalmente utilizzati risonatori dielettrici per (v. par. 5.4.b) per oscillatori tra 4 e12 GHz e risonatori ceramici (v. par. 5.4.a) per oscillatori tra 0.5 e 5 GHz. Con queste tecnologie si ottengono dispositivi a basso rumore, stabili in temperatura ed in frequenza.

11.7a Oscillatore con risonatore dielettrico

Gli oscillatori che utilizzano risonatori dielettrici sono comunemente indicati con il nome di oscillatori a risonatore dielettrico (Dielectric Resonator Oscillator - DRO). Una possibile configurazione per questi oscillatori è mostrata in Fig. 11.18.



Fig. 11.18

Il progetto dell'oscillatore verrà condotto dimensionando inizialmente l'impedenza Z_3 ed in seguito il circuito risonante. In questa fase si suppone assente la rete di transizione e quindi si ipotizza che il transistor sia chiuso direttamente su di un carico a 50 Ω . In seguito verrà progettata la rete di transizione.

L'impedenza Z_3 viene dimensionata al fine di produrre, per il componente attivo, valori di S'₁₁ in modulo maggiori di uno (resistenza di ingresso negativa). Poiché il carico Z_3 è in genere puramente reattivo per esso risulta $|\Gamma_3| = 1$. Per il progetto di Z_3 è quindi possibile tracciare nel piano dei coefficienti di riflessione di ingresso il luogo a $|\Gamma_3| = 1$. Questo può essere fatto molto semplicemente procedendo per punti ed osservando che se si indica con x la parte reale di Γ_3 dovendo essere $|\Gamma_3| = 1$ dovrà essere $\Gamma_3 = x + j\sqrt{1-x^2}$, Quindi i punti della circonferenza possono essere ottenuti inserendo questa espressione nel termine S'₁₁ della (11.44).

In Fig. 11.19 sono mostrate queste curve per un generico transistor. Come si vede esistono dei valori di X_3 (Es. $X_3 = -100$) che rendono S'₁₁ in modulo maggiore di uno.



Fig. 11.19

Allo stesso risultato si può arrivare impostando un semplice programma che calcoli, utilizzando le (11.44), S'₁₁ al variare di $Z_3 = jX_3$ ovvero Γ_3 e scelga quei valori di X₃ che danno il più alto valore del $|S'_{11}|$ (che in ogni caso deve risultare maggiori di 1).

Poiché con molti CAD commerciali è possibile effettuare un'analisi parametrica, un altro possibile approccio per il dimensionamento dell'impedenza Z_3 è quello di utilizzare questa opzione per graficare l'andamento del $|S'_{11}|$ al variare di C_3 e scegliere quindi il valore di C_3 che massimizza $|S'_{11}|$.

Una volta scelto Z_3 il transistor controreazionato diventa un componente attivo a due bocche per il quale è possibile calcolare la matrice di scattering utilizzando le (11.44).

Il passo successivo di progetto consiste nel determinare il valore del coefficiente di riflessione Γ_1 in Fig. 11.12 tale da verificare la condizione di innesco delle oscillazioni. Essendo il risonatore dielettrico modellabile come un circuito RLC parallelo ed essendo, nei casi pratici, spesso verificata la condizione $Y_0 > |G_D| > G_L$ ovvero $Y_0 > |G_{11}| > G_1$ dovrà essere (v. nota pag. 325):

$$|\Gamma_1| |\mathbf{S}'_{11}| > 1 \tag{11.46}$$

$$\angle \Gamma_1 + \angle S'_{11} = 0.$$
 (11.47)

Per il dimensionamento $|\Gamma_1| \in \angle \Gamma_1$ si possono utilizzare due specifiche procedure. Per quel che riguarda il $|\Gamma_1|$ questo dipende dal tipo di DR utilizzato e dalla distanza tra il DR e la linea a microstriscia. Questo legame è stato valutato in precedenza (vedi termine S₁₁ in Eq. (5.11)) ed inserito nella (11.46) si ottiene:

$$\left|\frac{1}{S_{11}'}\right| < \left|\Gamma_{1}\right| = \left|\frac{\beta}{\beta + 1 + j2Q_{u}\frac{\Delta\omega}{\omega_{0}}}\right|$$
(11.48)

1

Vi sono in commercio vari software, spesso forniti dalle stesse case che producono i risonatori dielettrici, tramite i quali è possibile valutare $|\Gamma_1|$ a partire dalle dimensioni del risonatore, dalle sue caratteristiche dielettriche e dalla distanza tra il risonatore e la microstriscia. Quindi, variando i suddetti parametri è possibile trovare un valore di $|\Gamma_1|$ che soddisfi la (11.40).

1

Per soddisfare la condizione di risonanza per la fase si utilizza il tratto di linea lungo L_r . Si noti infatti che alla risonanza il DR è puramente resistivo, e risulta $R_1 > Z_0$, per cui la sua fase è zero e quindi si avrà:

$$-2\beta L_r + \angle S'_{11} = 0 \tag{11.49}$$

Al fine di verificare la correttezza del dimensionamento è utile effettuare l'analisi con il criterio di Nyquist precedentemente descritto (v. par 11.4). Valutando tramite il plot di Nyquist l'intercetta con l'asse positivo delle ascisse si può verificare se nel circuito si instaureranno delle oscillazioni e valutare la loro frequenza. Inoltre, fatto estremamente importante, è anche possibile vedere se il circuito presenta delle oscillazioni spurie a frequenze diverse da quella di progetto.

Se l'analisi con Nyquist fornisce risultati positivi il componente così realizzato è in grado di oscillare su di un carico pari a 50 Ω . Utilizzando dei CAD nei quali siano implementate tecniche di analisi per strutture non lineari è poi possibile valutare le prestazioni dell'oscillatore in termini di effettiva frequenza di risonanza (*), potenza di uscita, armoniche e rumore di fase.

Utilizzando questi CAD è anche possibile dimensionare la rete di transizione in uscita per ottimizzare le prestazioni dell'oscillatore in termini di rumore di fase, potenza di uscita, armoniche, etc.

11.7.b Oscillatore con risonatore ceramico

Gli oscillatori che utilizzano risonatori ceramici sono comunemente indicati con il nome di oscillatori ceramici. Una possibile configurazione per questi oscillatori è mostrata in Fig. 11.20.

Anche in questo caso il dimensionamento sarà condotto supponendo inizialmente di eliminare la transizione e di considerare il transistor chiuso in uscita su di un carico pari a 50 Ω .

^(*) Se il dimensionamento è stato condotto correttamente la frequenza di oscillazione calcolata con il CAD non lineare sarà molto vicina a quella valutata con l'analisi lineare.



Fig. 11.20

Il primo passo della sintesi dell'oscillatore consiste nel dimensionare l'elemento puramente reattivo Z_3 al fine di ottenere il $|S'_{11}|$ massimo ed in ogni caso maggiore di 1. Questo può essere fatto seguendo la procedura descritta nel precedente paragrafo.

Il secondo passo consiste nel dimensionare il circuito risonante in ingresso al fine di ottenere la desiderata frequenza di oscillazione. Poiché il circuito equivalente di un risonatore dielettrico è un RLC parallelo deve essere verificata la condizione di risonanza parallelo. Indicata con $Y_{IN} = G_{IN} + jB_{IN}$ l'ammettenza di ingresso del transistor controreazionato, il circuito risonante dovrà presentare un'ammettenza $Y_1 = G_1 + jB_1$ tale che risulti:

$$G_1 + G_{IN} < 0$$
 (11.50)

$$B_1 + B_{IN} = 0 \tag{11.51}$$

Date la basse perdite associate al risonatore dielettrico la (11.50) è quasi sempre verificata. Al fine di soddisfare la (11.51) bisognerà scegliere un risonatore dielettrico per il quale, alla richiesta frequenza di risonanza, risulti $B_1 = -B_{IN}$. Essendo il comportamento in ingresso dei transistor tipicamente di tipo capacitivo, questa condizione è verificata facendo operare il risonatore ceramico nella regione induttiva a sinistra della prima risonanza parallela. La lunghezza del risonatore può essere scelta utilizzando le equazioni (5.14) (5.16). Tuttavia le case costruttrici dei risonatori forniscono dei CAD tramite i quali, fissato il desiderato valore di induttanza e la frequenza di risonanza (tipicamente tra il 10 e il 30% maggiore della frequenza di lavoro) viene indicato direttamente il codice del componente da ordinare ed i parametri da inserire nel CAD di simulazione.

Al fine di verificare la correttezza del dimensionamento è utile valutare, tramite il plot di Nyquist, l'intercetta con l'asse positivo delle ascisse e quindi verificare se nel circuito si instaureranno delle oscillazioni e la loro frequenza. Inoltre, fatto estremamente importante, è anche possibile vedere se il circuito presenta delle oscillazioni spurie a frequenze diverse da quella di progetto.

Se l'analisi con Nyquist fornisce risultati positivi il componente così realizzato è in grado di oscillare su di un carico pari a 50 Ω . Utilizzando dei CAD nei quali siano implementate tecniche di analisi per strutture non lineari è

poi possibile valutare le prestazioni dell'oscillatore in termini di effettiva frequenza di risonanza, potenza di uscita, armoniche e rumore di fase.

Utilizzando questi CAD è anche possibile dimensionare la rete di transizione in uscita per ottimizzare le prestazioni dell'oscillatore in termini di rumore di fase, potenza di uscita, armoniche, etc.

11.8 Oscillatori a frequenza variabile

Negli oscillatori a frequenza variabile l'elemento attivo deve presentare una resistenza negativa su tutta la banda di interesse. Come elemento risonante a frequenza variabile si utilizzano tipicamente delle sfere di YIG o dei varactor. Gli oscillatori con YIG possono coprire delle ampie bande ma sono lenti, viceversa quelli a varactor sono veloci ma riescono a coprire solo delle bande limitate.

11.8.a Oscillatore YIG

Negli oscillatori a larga banda sintonizzabili si pone l'enfasi, principalmente all'ottenimento della più larga banda possibile piuttosto che sulla potenza di uscita.

Per questo motivo si segue un approccio diverso rispetto a quello utilizzato negli oscillatori a frequenza fissa. Con riferimento allo schema di Fig. 11.21, il primo step consiste nel progettare $X_2(\omega)$, R_2 , $X_3(\omega)$ in modo tale che l'elemento di sintonia (Z_1) veda un impedenza (Z_{IN}) avente una parte reale negativa nella banda di frequenze desiderata. Deve inoltre risultare Z_{IN} induttiva (capacitiva) in modo che la frequenza di oscillazione si avrà dove il risonatore appare capacitivo (induttivo) vicino alla sua frequenza di risonanza.



Fig. 11.21

Per far questo si valuta la matrice di scattering del transistor visto come componente a due porte [S'] a partire da quella del tre porte [S]; dopodiché il due porte è convertito in un componente ad una porta in base alla:

$$\Gamma_{\rm IN} = {\bf S}_{11}' + \frac{{\bf S}_{12}' {\bf S}_{21}'}{\frac{1}{\Gamma} - {\bf S}_{22}}$$
(11.52)

Ricordando che i parametri di [S'] sono collegati a Γ_{3} , la relazione (11.52) può essere utilizzata per studiare Γ_{IN} per ogni combinazione di Γ_2 e Γ_3 e quindi può essere utilizzata per progettare Γ_2 e Γ_3 al fine di ottenere una resistenza negativa su di un'ampia banda.

11.8.b Oscillatore a varactor

Un possibile schema di un oscillatore a varactor è mostrato in Fig. 11.22. Anche in questo caso si pone l'accento sull'impedenza vista dall'elemento sintonizzabile. In questo caso si deve avere $G_{IN}(\omega) < 0$ nella banda di interesse ed inoltre, come si comprenderà meglio nel seguito, si deve fare in modo che nella stessa banda si abbia $B_{IN}(\omega) < 0$.



Fig. 11.22

Per il progetto degli oscillatori a varactor è utile riportare graficamente l'andamento della $G_{IN}(\omega)$ e della $B_{IN}(\omega)$ in funzione di ω (Fig. 11.23).

Poiché la capacità del varactor varia tra C_{MIN} e C_{MAX} e poiché la banda di sintonia è limitata alle frequenze per cui è verificata la condizione (di risonanza) $B_s = -B_d$, si ha:

$$C_{MIN} \omega_{MAX} = -B_{IN}(\omega_{MAX})$$

$$(11.53)$$

$$C_{MAX} \omega_{MIN} = -B_{IN}(\omega_{MIN})$$



Fig. 11.23

Anche la relazione (11.52) è mostrata in Fig. 11.23. Come si vede dal grafico, la banda di sintonia (ω_{MAX} - ω_{MIN}) è inferiore alla banda in cui la conduttanza è negativa.

Per aumentare la banda di sintonia si può inserire una induttanza in parallelo all'ingresso (induttanza tratteggiata in Fig. 11.22).

In questo caso si ha:

$$C_{MIN} \omega_{MAX} = -B(\omega_{MAX}) + \frac{1}{L\omega_{MAX}}$$

$$C_{MAX} \omega_{MIN} = -B(\omega_{MIN}) + \frac{1}{L\omega_{MIN}}$$
(11.54)

Facendo il rapporto tra le due espressioni (11.54) e nell'ipotesi di L piccolo si ottiene :

$$\frac{C_{\text{MIN}}}{C_{\text{MAX}}} \frac{\omega_{\text{MAX}}}{\omega_{\text{MIN}}} = \frac{\omega_{\text{MIN}}}{\omega_{\text{MAX}}}$$
(11.55)

da cui segue:

$$\frac{\omega_{\text{MAX}}}{\omega_{\text{MIN}}} = \sqrt{\frac{C_{\text{MAX}}}{C_{\text{MIN}}}}$$
(11.56)

Quindi il massimo rapporto tra gli estremi della banda di sintonia è legato alla radice quadrata del rapporto tra il valore massimo ed il valore minimo che può essere assunto dalla capacità del varactor.