# Misure
# ed
# incertezze di misura

## Misurazione e Misura

- Misurare significa quantificare una grandezza fisica chiamata misurando tramite un processo (misurazione) il cui risultato è detto misura.

- La misura deve poter essere ripetuta anche da altri e quindi va comunicata in modo inequivocabile. Pertanto, con la misura bisogna fornire almeno il valore, l'incertezza e l'unità di misura:

## Valore, Incertezza e Unità

- **Il valore** che quantifica il misurando – è il risultato del confronto tra il misurando e una grandezza di riferimento (CAMPIONE).

- **L'incertezza della misura** – è il grado di dispersione dei valori attribuiti al misurando in occasione di diverse misurazioni ed è, quindi, indicativa del pregio (e anche del costo) della strumentazione di misura e anche della metodologia adottata.

- **L'unità di misura** – che deve essere internazionalmente riconosciuta ai fini di una migliore comunicazione del risultato.

## Esempi di Misura

- Tensione a vuoto di una batteria (9,6 ± 0,2) V

- Resistenza di un resistore (12,5 ± 0,1) Ω

- Si comunica il valore, l'incertezza, e l'unità di misura.

## Errori e incertezze (effetti casuali)

- Nel processo di misura intervengono **molti <u>fattori (grandezze) di influenza</u>**: la temperatura, l'umidità, vibrazioni o disturbi di tipo elettrico e elettromagnetico dell'**ambiente** in cui si svolge la misura, etc.

- Tutti questi fattori (grandezze di influenza) interagiscono in vari modi nel processo di misura, per cui se questo è ripetuto si ottengono risultati diversi determinando una **dispersione dei valori misurati**.

- Questi fattori citati intervengono in modo casuale nel processo di misura pertanto se si ripete N volte la misura (con $N \to \infty$) e si opera una media il loro effetto tende ad annullarsi (**<u>effetti casuali</u>**).

## Errori e incertezze (effetti sistematici)

- La misura è anche influenzata dai <u>comportamenti non ideali dei vari elementi del sistema di misura (difetti nei modelli e nei campioni)</u> che danno luogo a scarti sempre nella stessa direzione (**<u>effetti sistematici</u>**) (non si possono rimuovere con un processo di media).

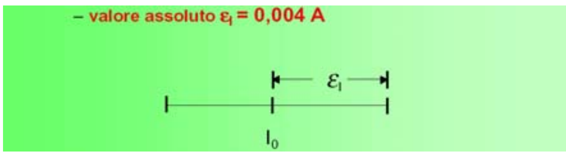
- Con riferimento a questi ultimi, in alcuni casi si è in grado di stimare l'entità e il segno dello scarto e pertanto si è in grado di correggere la misura (taratura) – in questo caso si parla di "errori" (errori sistematici). Tuttavia, anche quando è possibile effettuare una taratura permangono sempre degli errori residui dovuti alle non idealità degli standard di taratura usati.

- Infine, in altri casi, gli scarti non si possono quantificare e quindi correggere (es. parametri meccanici o magnetici in un amperometro analogico).

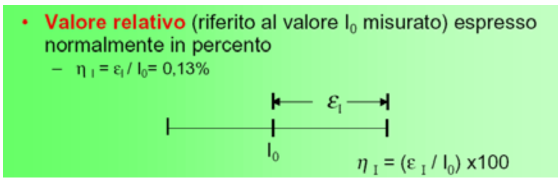
# Espressione della misura

- In conclusione, la misura sarà sempre affetta da una certa **<u>“incertezza” che quindi caratterizza la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando.</u>**
- Per effetto dell’incertezza **il risultato di una misura non è espresso da un valore, ma da un intervallo** per cui la misura di una grandezza “m” sarà espressa come:
- $M \pm \varepsilon$
- dove M, valore centrale dell’intervallo, è la stima “migliore” del misurando ed $\varepsilon$ è la semiampiezza della fascia di incertezza.

# Valore assoluto e relativo




$I = I_o \pm \varepsilon_I$




$I = I_o \pm \eta_I\%$

## Scrittura del risultato di una misura

- Per scrivere correttamente il risultato di una misura bisogna fare alcune considerazioni:
- Cifre decimali di un numero sono le cifre dopo la virgola (es 7,543624 -> cifre decimali = 543624)
- Cifre significative di un numero sono le cifre dopo gli zeri (es 0,00254 cifre significative = 254)

## Misura con incertezza assoluta

- Quando si effettua una misura si riporta inizialmente il valore letto sullo strumento con tutte le sue cifre decimali (es 7,543624).
- In seguito si valuta l'incertezza con tutte le sue cifre decimali (es 0,00254).
- Si scrive l'incertezza considerando al massimo due cifre significative arrotondando al valore superiore (es 0,0026).
- Si scrive il valore con le stesse cifre decimali dell'incertezza arrotondando al più vicino (es 7,5436)
- Si scrive la misura:
    - **m = 7,5436 ± 0,0026**

# Valutazioni di tipo A

- Se si suppone che la misura sia affetta solo da incertezze di tipo casuale, l'incertezza può essere valutata con metodi statistici. Questi **<u>metodi di valutazione dell'incertezza si dicono di tipo A</u>**. Se si ripete la misura nelle stesse condizioni per molte volte e si traccia l'istogramma si vede che questo tende ad una gaussiana (Teorema del limite centrale)

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - x_m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- con $x_m$ valore medio e $\sigma^2$ varianza.
- la probabilità che un valore preso a caso tra le misurazioni effettuate cada nell'intervallo $x_m \pm \sigma$ è del 68.4%.

# Stime

- La teoria statistica dimostra che, per qualunque p(x), la <u>stima migliore del valor medio</u> ($x_m$) è data dalla media sperimentale (o campionaria) $m_N$ ottenuta su N osservazioni indipendenti $x_k$ come:

$$m_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

- La <u>stima migliore della varianza</u> è data dalla varianza del valor medio delle misure definita come:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}(m_k - m_N)^2$$

- Volendo quindi quantificare l'incertezza si assume $\sigma_M$ come stima sperimentale dell'incertezza.
- $\sigma_M$ è detta scarto o <u>**incertezza standard** di tipo A sperimentale ed è indicata con la lettera u.</u>
- Come noto si ha che la probabilità che un valore preso a caso cada nell'intervallo è del 68.4%. Se non si ritiene sufficiente la probabilità del 68.4% si può aumentare questo valore introducendo <u>**l'incertezza estesa** K × u</u> dove K è detto fattore di copertura.
- Con K = 2 si ha una probabilità del 95.4% (2u). Con K = 3 si ha una probabilità del 99.7% (3u). Quindi si può esprimere la misura come:

$$x = m_N \pm Ku$$

# Valutazioni di tipo B

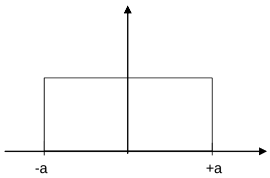
- In questa classe, rientrano tutte le valutazioni di incertezze che non vengono ricavate tramite la deviazione standard di misure ripetute (come per quella di tipo A).

## Procedura per valutazioni di tipo B

- Nelle valutazioni di tipo B in primo luogo si fa una stima dei limiti delle variazioni sulla misura causate da una sorgente d'incertezza, ovvero si valuta lo scarto massimo.
- In seguito si assume una certa distribuzione di probabilità tra questi limiti.
- Infine, si calcola una deviazione standard equivalente che rappresenta l'incertezza standard di tipo B.

## Distribuzione rettangolare

- La distribuzione rettangolare si utilizza quando si conoscono i limiti di variazione e si può assumere che tutti i valori siano equiprobabili ovvero quando non si hanno informazioni sulla distribuzione tra questi limiti.

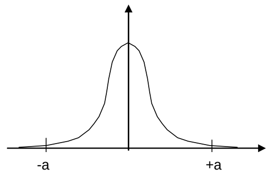



- In questo caso la relazione tra incertezza standard u e i limiti di variazione (scarto massimo ± a) è :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(x - x_m)^2 dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} x^2 dx = \frac{1}{2a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^2}{3}$$

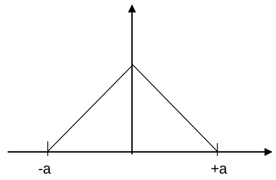
$$u = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0.6a$$

# Altre distribuzioni



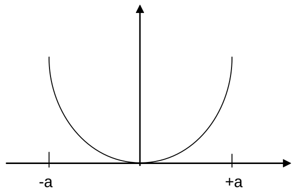

distribuzione normale

$$u = \frac{a}{2} = 0.5a$$




distribuzione triangolare

$$u = \frac{a}{\sqrt{6}} \cong 0.4a$$




distribuzione ad U

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \cong 0.7a$$

# Incertezza per misure dirette

- Le misure dirette si distinguono tra misure singole e misure ripetute.
- La prima strategia di solito si adotta quando si utilizzano metodi e strumenti non troppo “sensibili”, cosicché ci si aspetta di ottenere sempre lo stesso risultato
- La seconda strategia si adotta con strumenti e metodi tanto “sensibili” da mettere in evidenza le variazioni indotte sulla misura dalle numerose grandezze di influenza.

# misure singole

- **Nelle misure singole** l'incertezza si ottiene, dopo aver corretto eventuali errori sistematici, combinando le incertezze di tipo B dovute alla strumentazione e ad altre cause.
- Per la valutazione dell'incertezza occorre specificare se si è calcolato l'errore massimo o l'incertezza standard.
- Per cui nel primo caso si avrà:

$$\delta y = \sum_{i=1}^{N} \delta y_i$$

- Mentre nel secondo caso si ha:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2}$$

# misure ripetute

- **Nelle misure ripetute** la stima migliore è data dalla media delle varie misure e l'incertezza totale va calcolata combinando le incertezze casuali e quelle sistematiche. Anche in questo caso si deve specificare se si è calcolato l'errore massimo:

$$\delta y_{tot} = \delta y_A + \delta y_B$$

- o l'incertezza standard

$$u_{tot} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

## Valutazione di caso peggiore (approccio deterministico) per l'errore di misure indirette (propagazione dell'errore)

- In alcuni casi, il misurando y non è stimabile tramite una misura diretta ma è una funzione di altre N quantità $x_i$ correlate ad esso attraverso una relazione funzionale:
- Nel caso di tre grandezze di ingresso possiamo scrivere:

$$y = f(a,b,c)$$

- Per le grandezze di ingresso il valore sarà noto all'interno di una fascia di incertezza; quindi si avrà:

$$a_m = a_0 \pm \delta a \qquad b_m = b_0 \pm \delta b \qquad c_m = c_0 \pm \delta c$$

$$y_0 = f(a_0, b_0, c_0)$$ valore della misura

## sviluppo in serie di Taylor

$$y_0 + \delta y = f(a_0 + \delta a, b_0 + \delta b, c_0 + \delta c) =$$

$$f(a_0, b_0, c_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta a + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta b + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta c$$

$$\delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta a + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta b + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta c$$

# Scarto massimo

- **Nel caso di valutazione pessimistica (deterministica)** si prendono tutte le derivate in modulo, e **l'errore massimo** coincide con lo scarto massimo su y, per cui si ha:

$$\delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{a_0,b_0,c_0}\right|\delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{a_0,b_0,c_0}\right|\delta b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\Big|_{a_0,b_0,c_0}\right|\delta c$$

- Formula di propagazione dell'errore

## Valutazione probabilistica della incertezza per misure indirette (propagazione dell'incertezza)

Se è richiesta una **valutazione di tipo probabilistico , in assenza di correlazione tra le grandezze,** la varianza è calcolabile come:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\Big|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 \sigma_c^2$$

E' il modello che deve essere utilizzato nella stima delle incertezze nella emissione di certificati ufficiali; è anche il modello suggerito dalla Guida all'espressione dell'incertezza di misura (CEI UNI).
Passando dalle varianze alle incertezze si ha:

$$u_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 u_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 u_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\Big|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 u_c^2$$

- Poiché sono coinvolte più grandezze, la distribuzione tende a quella gaussiana e la $\sigma_y$ assume il significato di incertezza tipo $u_y$ con una fiducia del 68.4%.

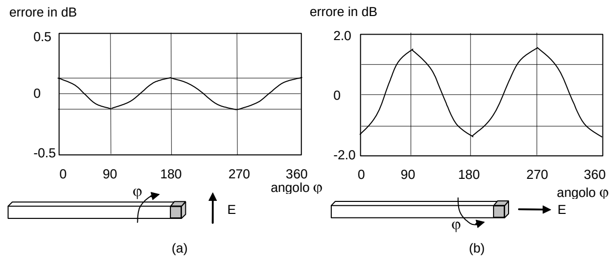
- Se si vogliono avere probabilità più elevate bisogna moltiplicare $u_y$ per un fattore di copertura.

# *Misure di campo*

# *a banda larga*

# *Isotropia*

- Questo errore è dovuto al fatto che il sensore, a parità di campo incidente, avrà una risposta ($V_{DC}$) diversa a seconda della direzione di incidenza del campo. Il sensore cioè non si comporta come un'antenna isotropa.
- E' evidente, viste le caratteristiche geometriche dei sensori, che l'influenza delle componenti di campo normali all'asta di sostegno del probe sarà diversa da quella delle componenti parallele all'asta.
- Un tipico andamento è mostrato in Figura (a) per il caso di campo perpendicolare ed in Figura (b) per il caso di campo parallelo. La figura evidenzia la variabilità dell'errore con l'angolo ma soprattutto il fatto che nel primo caso si ottengono degli errori più bassi.




# *Linearità e Risposta in frequenza*

- Il comportamento di un rettificatore che utilizza diodi Schottky è all'incirca lineare per potenze comprese tra la sensibilità ed il punto di compressione ad 1 dB.
- Tuttavia anche in questo intervallo la risposta non sarà perfettamente lineare. L'errore di linearità è definito come la massima deviazione dei dati misurati dalla retta che meglio approssima i dati al variare della potenza in ingresso.
- L'errore di risposta in frequenza, invece, è legato alle variazioni con la frequenza della risposta del sensore.

# *Calibrazione (Taratura)*

- Questo errore è dovuto al fatto che anche dopo la calibrazione permane un'incertezza residua dovuta alle imperfezioni del sistema di calibrazione.

- Prima di passare ad un esempio si ricorda il legame che intercorre tra l'espressione dello scarto in dB e quella dello scarto percentuale.

$$a_x(dB) = 20\log_{10}\left(1 + \frac{a_x(\%)}{100}\right)$$

$$\frac{a_x(dB)}{20} = \log_{10}\left(1 + \frac{a_x(\%)}{100}\right)$$

$$10^{\frac{a_x(dB)}{20}} = 1 + \frac{a_x(\%)}{100}$$

$$a_x(\%) = 100\left(10^{\frac{a_x(dB)}{20}} - 1\right)$$

# *Esempio: sonda ET3DV5R*

- Ad esempio per la sonda ET3DV5R della ditta Schimd & Partner il datasheet fornisce per gli scarti relativi in dB i seguenti valori con le relative distribuzioni:

- I: deviazione dall'isotropia $\pm 1.5\text{dB}$ rettangolare
- L: deviazione dalla linearità $< \pm 0.2\text{dB}$ rettangolare
- C: incertezza residuale della calibrazione $\pm 6.6\%$ normale

- Quindi si avranno i seguenti scarti percentuali:

$$a(I) = 100 \cdot \left(10^{\frac{1.5}{20}} - 1\right) = 18.85\%$$

$$a(L) = 100 \cdot \left(10^{\frac{0.2}{20}} - 1\right) = 2.33\%$$

$$a(C) = 6.6\%$$

# *Incertezza estesa*

- Per calcolare le incertezze standard, gli scarti percentuali vanno divisi per i fattori di normalizzazione delle rispettive distribuzioni; quindi si ha:

$$u(I) = \frac{a(I)}{\sqrt{3}} = 10.88\% \qquad u(L) = \frac{a(L)}{\sqrt{3}} = 1.34\% \qquad u(C) = \frac{a(C)}{2} = 3.3\%$$

- L'incertezza totale associata alla misura del campo elettrico sarà (con la valutazione del valore più probabile):

$$u(E) = \sqrt{u^2(I) + u^2(L) + u^2(C)} = 11.5\%$$

- Se si considera un fattore di copertura k = 2 si ottiene un'incertezza estesa data da :

$$u = 2u(E) = 23\%$$

# *Misure di SAR*

# Definizioni

- Il SAR è valutato misurando il campo elettrico (**E**) all'interno del fantoccio, la conducibilità ($\sigma$), e la densità ($\rho$) e si ha:

$$\boxed{SAR = \frac{\sigma|\mathbf{E}|^2}{2\rho} = \frac{\sigma E_{eff}^2}{\rho} \quad [W/kg]}$$

- Ad esempio con riferimento all'esposizione di soggetti al campo emesso dai telefoni cellulari il valore, che in base alla normativa Europea (ICNIRP) non deve essere superato è 2 W/kg mediato su 10 grammi.

- Poiché il SAR è determinato indirettamente misurando $E_{eff}$, $\sigma$, $\rho$ ogni singolo strumento per la misura di questi parametri dovrà essere indipendentemente calibrato. Ad esempio, con riferimento ai sensori di campo si dovrà stimare il coefficiente $K_E$ . Tuttavia, in questo caso, la procedura di calibrazione è piuttosto complessa in quanto il sensore va calibrato all'interno di un liquido.
-

# Valutazione dell'incertezza

- Per il calcolo dell'incertezza si può osservare che in base alla definizione di SAR si ha:

$$\left(\frac{\partial SAR}{\partial E_{eff}}\right) = 2E_{eff}\frac{\sigma}{\rho} = 2\frac{SAR}{E_{eff}}$$

$$\left(\frac{\partial SAR}{\partial \sigma}\right) = \frac{E_{eff}^2}{\rho} = (1)\frac{SAR}{\sigma}$$

$$\left(\frac{\partial SAR}{\partial \rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\sigma E_{eff}^2 = (-1)\frac{SAR}{\rho}$$

- Quindi lo scarto è dato da:

$$\delta(SAR) = \frac{\partial SAR}{\partial E_{eff}}\delta E_{eff} + \frac{\partial SAR}{\partial \sigma}\delta\sigma + \frac{\partial SAR}{\partial \rho}\delta\rho =$$

$$= 2\frac{SAR}{E_{eff}}\delta E_{eff} + \frac{SAR}{\sigma}\delta\sigma - \frac{SAR}{\rho}\delta\rho$$

- e lo scarto percentuale sarà:

$$\frac{\delta SAR}{SAR} = 2\frac{\delta E_{eff}}{E_{eff}} + \frac{\delta\sigma}{\sigma} - \frac{\delta\rho}{\rho}$$

- Per il calcolo dell'incertezza totale u(SAR) si deve utilizzare la formula dell'incertezza combinata quindi nell'ipotesi probabilistica si avrà:

$$u(SAR) = 2\sqrt{(2)^2 u^2(E) + (1)^2 u^2(\sigma) + (-1)^2 u^2(\rho)}$$

- dove si è considerato un fattore di copertura pari a 2 che garantisce un livello di confidenza del 95% per l'incertezza totale.

## *Incertezza sul campo elettrico*

- Con riferimento alla misura di campo elettrico se si considera il sensore miniaturizzato BT3DV5R della ditta Smith & Partners, poiché questa sonda è stata progettata per effettuare misure di SAR in questo caso l'incertezza sull'isotropia e sulla calibrazione è migliore rispetto al caso in aria.

Infatti si ha:

- $a(I) = \pm 0.4\text{dB}$ rettangolare
- $a(L) = \pm 0.2\text{dB}$ rettangolare
- $a(C) = 0.6\%$ normale

- Procedendo come prima si trova:

$$u(E) = \sqrt{\left(\frac{4.7}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2.3}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{6.6}{2}\right)^2} \cong 5\%$$

## *Incertezza sulla conducibilità*

- Per la misura di conducibilità si può utilizzare la sonda dell'Agilent 85070B connessa ad un analizzatore di reti.

- Il sistema ha un'incertezza del 5% con distribuzione rettangolare sulla misura di $\varepsilon''$.

- Essendo $\sigma = 2\pi f \varepsilon_0\, \varepsilon''$ risulta per l'incertezza standard :

$$u(\sigma) = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} \cong 3\%$$

# Incertezza sulla densità

- La misura di densità può essere effettuata misurando separatamente il peso di 10ml di materiale con una bilancia elettronica ed il volume con un cilindro graduato e si ha: $\rho = V / P$
- I costruttori danno per il cilindro una precisione di $\pm 0.5\%$ e per la bilancia una precisione di $\pm 0.1g$ che trasformata in percentuale rispetto al valore misurato diventa (10 ml di cervello equivalente pesano 10.7 g)

$$\frac{0.1g}{10.7g} = 0.0093 = 0.93\%$$

- L'incertezza standard totale (assumendo una distribuzione rettangolare) della misura di densità è ottenibile procedendo come fatto per il SAR. In questo caso i coefficienti valgono tutti uno e si ottiene:
-

$$u(\rho) = \sqrt{\left(\frac{0.5}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.93}{\sqrt{3}}\right)^2} \cong 0.6\%$$

# Incertezza estesa

- L'incertezza standard media totale associata alla misura di SAR si calcola applicando la formula relativa alle incertezze combinate in cui va inserito un ulteriore fattore correttivo del 6% dovuto al fatto che si sta considerando un mezzo diverso da quello utilizzato nei test di calibrazione di fabbrica della sonda per cui si ha:

$$u(SAR) = 2 \cdot \sqrt{(2)^2 \cdot u^2(E) + (1)^2 \cdot u^2(\sigma) + (-1)^2 \cdot u^2(\rho) + (1)^2 \cdot (6\%)^2} =$$

$$2 \cdot \sqrt{(2)^2 \cdot (5)^2 + (3)^2 + (0.6)^2 + (6)^2} = 22.3\%$$

- Si ottiene quindi un'incertezza standard totale sulla misura di SAR del 22.3% con un livello di confidenza del 95%