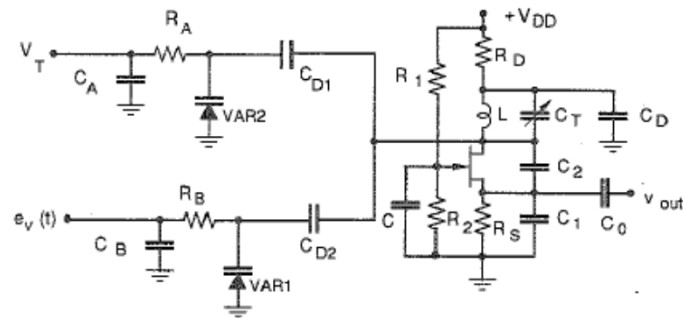


Oscillatore controllato in tensione (VCO)



1

Frequenza di oscillazione

$$Z = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC(V)} \cong j\omega L[1 + \omega^2 LC(V)]$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} [L + \omega_0^2 L^2 C(V)]} \cong \frac{1}{L[C_c + C(V)]} = \frac{1}{LC_T}$$

2

Guadagno del VCO /1

$$2 \cdot \text{Log}f_0 = -\text{Log}\{4\pi^2 L[C_C + C(V)]\}$$

$$\frac{\Delta f_0}{f_0} = \Delta \text{Log}f_0 = -1/2 \frac{4\pi^2 L \Delta C(V)}{4\pi^2 L[C_C + C(V)]} = -2\pi^2 L \Delta C(V) f_0^2$$

$$\Delta C(V) = -\frac{\Delta f_0}{2\pi^2 L f_0^3}$$

3

Guadagno del VCO /2

$$C(V) = \frac{C_{j0}}{\sqrt{1+V/V_{Bi}}} \quad \Delta C(V) = -1/2 \frac{1}{V_{Bi}} \frac{C_{j0}}{(1+V/V_{Bi})^{3/2}} \Delta V = \frac{-1/2 \sqrt{V_{Bi}} C_{j0}}{(V_{Bi} + V)^{3/2}} \Delta V$$

$$k_V = \frac{\Delta f_0}{\Delta V} = \frac{\Delta f_0}{\Delta C} \cdot \frac{\Delta C}{\Delta V} = \pi^2 L f_0^3 \cdot \frac{\sqrt{V_{Bi}} C_{j0}}{(V_{Bi} + V)^{3/2}}$$

$$\text{Poiché: } f_0 = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{LC_T}}$$

$$k_V(V) = \frac{\sqrt{V_{Bi}} C_{j0}}{8\pi\sqrt{L}[C_T(V_{Bi} + V)]^{3/2}} = \frac{\sqrt{V_{Bi}} C_{j0}}{8\pi\sqrt{L}\left[C_C + \frac{C_{j0}}{\sqrt{1+V/V_{Bi}}}\right](V_{Bi} + V)^{3/2}}$$

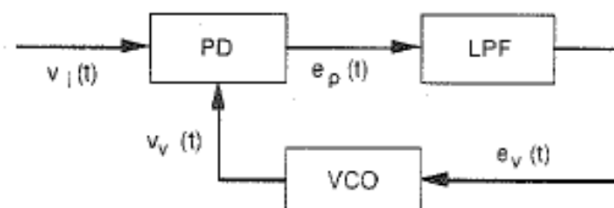
4

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /1

- Il PLL è un sistema che permette di sincronizzare l'oscillatore locale presente nel ricevitore ai dati ricevuti. Il segnale dell'oscillatore agganciato in fase può essere utilizzato per rigenerare il segnale in ingresso.
- Il sistema valuta la fase del segnale ricevuto e sincronizza la fase del VCO attraverso un anello di retroazione in continua.

5

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /2



- Il sistema comprende un Phase-Detector, un filtro passa basso con risposta impulsiva $w(t)$ e un Oscillatore controllato in tensione.

6

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /3

- Facciamo l'ipotesi che il segnale ricevuto $v_i(t)$ abbia fase istantanea $\varphi_i(t)$ e abbia all'istante iniziale fase relativa $\varphi_{vi}(0)$ rispetto al segnale in uscita dall'oscillatore $v_v(t)$:

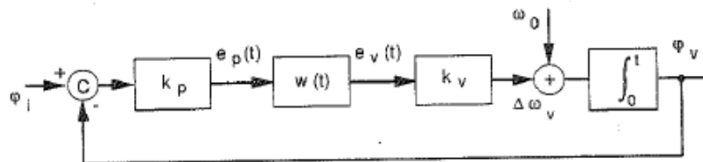
$$\begin{aligned} v_v(t) &= A_v(t) \cdot \sin(\omega_v t + \varphi_{vi}(0)) \\ v_i(t) &= A_i(t) \cdot \sin(\omega_i t) \end{aligned}$$

- Si suppone che il PD abbia guadagno K_p e il VCO guadagno K_v .

7

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /4

- Il sistema può essere rappresentato con lo schema equivalente di Figura:



8

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /5

$$e_p(t) = K_p \cdot [\varphi_i(t) - \varphi_v(t)] \quad \longleftrightarrow \quad E_p(s) = K_p \cdot [\varphi_i(s) - \varphi_v(s)]$$

$$e_v(t) = e_p(t) * w(t) \quad \longleftrightarrow \quad E_v(s) = E_p(s) \cdot W(s)$$

$$\omega_v(t) = \omega_0 + K_v \cdot e_v(t)$$

9

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /6

- Per studiare il comportamento dinamico del PLL si suppone che all'istante iniziale sia in equilibrio ($\omega_i = \omega_0$, $e_v = 0$).
- Si suppone inoltre che subisca uno scarto piccolo $\varphi_i(t)$ (i.e. tale che il sistema possa essere studiato in regime di linearità) rispetto al valore di equilibrio φ_{i0} :

$$\begin{aligned} \varphi_{iTOT}(t) &= \varphi_{i0} + \varphi_i(t) \\ \varphi_{vTOT}(t) &= \varphi_{v0} + \varphi_v(t) = \varphi_{i0} + \varphi_v(t) \end{aligned}$$

10

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /7

- Dall'analisi (lineare) dell'anello si ottengono le funzioni di trasferimento del PLL in funzione del suo guadagno d'anello $T(s)$:
 - $T(s) = K_p \cdot K_v \cdot W(s) / s$
 - $\varphi_v(s) / \varphi_i(s) = T(s) / [1 + T(s)] = H(s)$
 - $\Delta\varphi(s) / \varphi_i(s) = [\varphi_i(s) - \varphi_v(s)] / \varphi_i(s) = 1 / [1 + T(s)]$
- Se $K_p \cdot K_v \rightarrow \infty$ la fase del VCO tende ad agganciare quella del segnale.

11

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /8

- Il funzionamento del PLL può essere compreso valutando la risposta ad un segnale d'ingresso che presenta un gradino di **fase** o di **frequenza** rispetto alla condizione di equilibrio.
- Nel caso di gradino di fase $\Delta\varphi_i$ si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\varphi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Delta\varphi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Delta\varphi_i / s \cdot 1 / [1 + T(s)] = 0$$

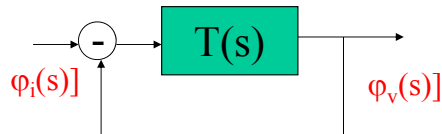
- Nel caso di gradino di frequenza $\Delta\omega_i$ si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\varphi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Delta\varphi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Delta\omega_i / s^2 \cdot 1 / [1 + T(s)] = \Delta\omega_i / [K_p \cdot K_v \cdot W(0)]$$

12

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /9

- Il PLL si comporta come un sistema a controreazione unitaria con guadagno d'anello $T(s)$.



- La stabilità dell'anello può essere studiata tracciando il luogo delle radici del guadagno d'anello $T(s)$ in funzione della risposta $W(s)$ scelta per il filtro.

13

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /10

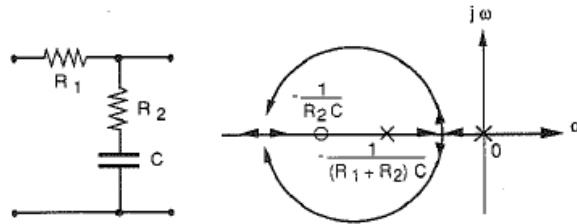
- Se $W(s) = 1$ (assenza del filtro) $T(s)$ presenta un polo nell'origine e non ci sono problemi di stabilità.
- Se $W(s) = 1 / (1 + s R C)$ (filtro R-C) $T(s)$ presenta un polo nell'origine e un secondo polo $s = -1 / (R C)$ e la risposta ha un andamento oscillante, con oscillazioni smorzate più lentamente quanto più è alto il guadagno $K_p \cdot K_v$:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p \cdot K_v}{R C}} \quad \xi = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{R \cdot C \cdot K_p \cdot K_v}}$$

14

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /11

- Per eliminare le oscillazioni si introduce nel filtro uno zero in maniera da ottenere il luogo delle radici seguente.



15

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /12

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p \cdot K_v}{(R_1 + R_2)C}} \quad \xi = \frac{1 + K_p \cdot K_v \cdot R_2 \cdot C}{2 \cdot \sqrt{(R_1 + R_2)C \cdot K_p \cdot K_v}}$$

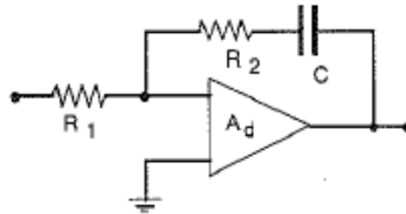
- Il guadagno di anello presenta infatti l'espressione:

$$T(s) = \frac{K_p \cdot K_v}{s} \frac{1 + s \cdot R_2 \cdot C}{1 + s \cdot (R_1 + R_2)C}$$

16

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /13

- Una struttura di filtro ancora più efficiente prevede l'utilizzo di un operazionale.



17

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /14

- In questo caso $T(s) = K_p \cdot K_v / s \cdot (1 + s R_2 C) / (s R_1 C)$.
- In particolare $W(s)$ ha un polo nell'origine e il sistema permette l'aggancio in fase anche in presenza di un gradino di frequenza.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p \cdot K_v}{R_1 C}} \quad \xi = \frac{\sqrt{(R_2^2 / R_1) C \cdot K_p \cdot K_v}}{2}$$

18

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /15

- L'espressione ottenuta per $H(s)$ è la seguente:

$$H(s) = \frac{2s\xi\omega_n + \omega_n^2}{s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2}$$

- Vedremo nel seguito gli effetti del PLL in presenza di rumore di fase in ingresso ad esempio bianco.

19

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /16

- L'intervallo di aggancio (**Lock Range**) è un parametro che dà conto della capacità del PLL a recuperare la condizione di aggancio, in presenza di rumore di fase, in maniera monotona entro un periodo.
- Il tempo di aggancio T_L è inversamente proporzionale ad ω_n . L'intervallo di aggancio $\Delta\omega_L$ è invece direttamente proporzionale ad ω_n . Pertanto il PLL aggancia più rapidamente e con una banda maggiore quanto più è elevato il valore di ω_n .
- Una banda maggiore però fa aumentare il rumore di fase in uscita.

20

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /17

- L'intervallo di aggancio (**Lock Range**) può essere valutato supponendo un gradino di pulsazione sull'ingresso $\Delta\omega_i$.
- All'uscita del filtro $W(j\omega) = |W(j\omega)| \cdot \exp(\varphi_W(j\omega))$, il segnale $e_v(t)$ vale:

$$e_v(t) = K_p |W(j\Delta\omega_i)| \cdot \cos(\Delta\omega_i t + \varphi_W(\Delta\omega_i))$$

- e la variazione massima di frequenza all'uscita del VCO è:

$$\Delta\omega_{MAX} = K_p K_v |W(j \Delta\omega_i)|$$

21

L'anello ad aggancio di fase (PLL) /18

- La condizione limite, in dipendenza dal tuning range del VCO e dal guadagno di anello, per cui si ottiene l'aggancio in un solo periodo è la seguente:

$$\Delta\omega_L = K_p K_v |W(j \Delta\omega_L)|$$

- Che nel caso di filtro attivo con un polo e uno zero diventa:

$$\Delta\omega_L = K_p K_v R_2 / R_1 = 2 \xi \omega_n$$

22

Sorgenti di rumore nei dispositivi /1

$$\overline{e_T^2} = 4kTB r_b$$

$$\overline{i_{\text{Shot}}^2} = 2q\overline{I_C}B$$

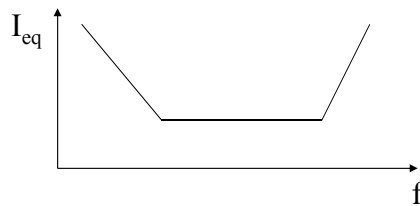
$$\overline{i_{\text{Flicker}}^2} = \int_B K_F \frac{\overline{I_B^{A_F}}}{f} df$$

- La presenza di tali sorgenti può essere rappresentata in una rete 2p con un modello equivalente rumoroso.

23

Sorgenti di rumore nei dispositivi /2

- La densità spettrale di potenza della corrente di rumore ha un andamento che può essere suddiviso in 3 zone:
 - 1. Andamento $1/f$ dovuto al rumore Flicker fino a qualche KHz.
 - 2. Andamento bianco dovuto al rumore Shot e Johnson.
 - 3. Andamento $\propto f^2$ dovuto al taglio in alta frequenza dei transistor.



24

Il rumore di fase negli oscillatori - 1

- A causa della presenza delle sorgenti di rumore nei dispositivi, all'ampiezza e alla fase dell'oscillatore si sovrappone del rumore:

$$v_{\text{out}}(t) = [\hat{V} + v(t)] \cdot \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

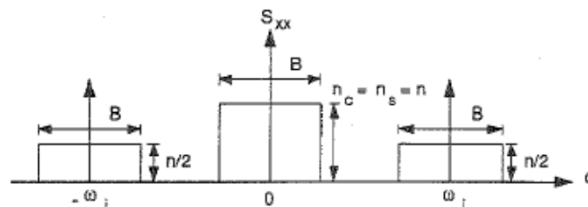
$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

- Mentre la modulazione dell'ampiezza può essere eliminata con il limitatore, il rumore di fase non viene alterato.

25

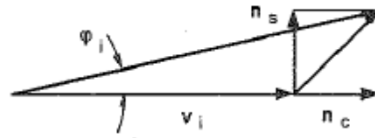
Il rumore di fase negli oscillatori - 2

- Se si considera un rumore a spettro bianco con banda B (i.e. il rumore è filtrato dagli stadi precedenti e/o dallo stadio di amplificazione A che costituisce l'oscillatore), si possono considerare le componenti analogiche di bassa frequenza.



26

Il rumore di fase negli oscillatori - 3



- Il rumore può essere considerato come un fasore che modifica sia il modulo (in maniera trascurabile) che la fase del segnale d'uscita. Per la potenza di rumore si ottiene:

$$\varphi_i(t) = \arctg\left(\frac{n_s(t)}{\hat{V} + n_c(t)}\right) \cong \frac{n_s(t)}{\hat{V}}$$



$$\overline{\varphi_i^2(t)} = \frac{n \cdot B}{2S} = \frac{N}{2S}$$

27

Il rumore di fase negli oscillatori - 4

- Il segnale complessivo ha uno spettro che presenta, oltre alla frequenza centrale, 2 bande laterali di potenza diversa.
- Determiniamo la componente dello spettro a frequenza f_m di un segnale composto da bande laterali B_1 (a $-f_m$) e B_2 (a f_m).

$$v(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B_1 \cdot \cos[(\omega_0 + \omega_m)t] + B_2 \cdot \cos[(\omega_0 - \omega_m)t]$$

- Esso può essere pensato come la sovrapposizione di una modulazione di ampiezza e di una modulazione di fase a basso indice.

28

Il rumore di fase negli oscillatori - 5

- Un segnale modulato in ampiezza produce uno spettro simmetrico:

$$v(t) = A \cdot [1 + \cos(\omega_m t)] \cdot \cos(\omega_0 t) = \\ A \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{A}{2} \cos[(\omega_0 + \omega_m)t] + \frac{A}{2} \cos[(\omega_0 - \omega_m)t]$$

- Supponiamo di avere un segnale sinusoidale ad ampiezza pari a 1 e modulato in fase con ampiezza massima pari a $\beta \ll 90^\circ$.

$$v(t) = \cos[\omega_0 t + \beta \cdot \sin(\omega_m t)]$$

29

Il rumore di fase negli oscillatori - 6

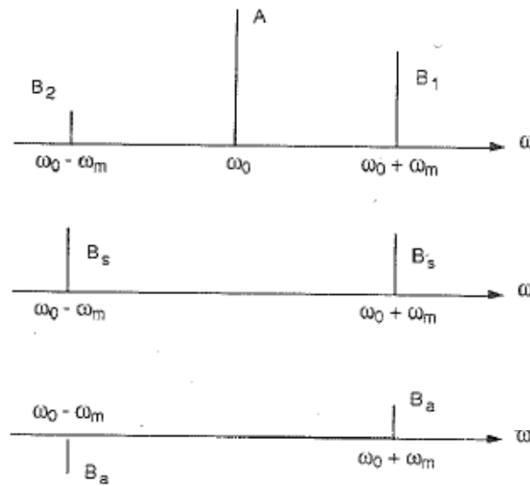
- Applicando le formule di prostaferesi si ottiene:

$$v(t) = \cos(\omega_0 t) - \frac{\beta}{2} \cos[(\omega_0 - \omega_m)t] + \frac{\beta}{2} \cos[(\omega_0 + \omega_m)t]$$

- Pertanto la relazione tra gli spettri del segnale complessivo e quella dei segnali modulati in fase e in ampiezza, è quella mostrata di seguito.

30

Il rumore di fase negli oscillatori - 7



31

Il rumore di fase negli oscillatori - 8

- Il massimo scostamento della frequenza γ è pari a: $\gamma = \beta \cdot f_m$
- La relazione che esiste tra le variabili aleatorie fase e frequenza istantanea è la seguente:

$$\hat{\Phi} = \hat{F} / f_m$$

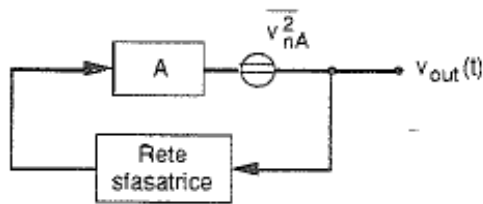
- Il rumore di fase viene caratterizzato attraverso il rapporto tra potenza di una banda laterale (per $\Delta\omega = 1\text{Hz}$) e potenza della portante **SSCR**(ω):

$$\text{SSCR}(\omega) = 10 \cdot \log \frac{S_{vv}(\omega) \cdot \Delta\omega}{P_{\text{tot}}}$$

32

Il rumore di fase negli oscillatori - 9

- Occorre a questo punto trovare un legame tra le sorgenti di rumore presenti nei dispositivi ed il rumore di fase in uscita dall'oscillatore.
- Si suppone per semplicità che il rumore sia additivo.



33

Il rumore di fase negli oscillatori - 10

- L'amplificazione del blocco A è considerata reale.
- Il rumore viene 'filtrato' dalla rete sfasatrice caratterizzata dal coefficiente di stabilità in frequenza S_F :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{S_F} \Delta\varphi \quad \longrightarrow \quad S_{\varphi\varphi}(\omega) = \frac{S_{\omega\omega}(\omega)}{\omega^2} \propto \left(\frac{\omega_0}{S_F}\right)^2 \frac{N(\omega)}{\omega^2}$$

34

Il rumore di fase negli oscillatori - 11

- Lo spettro del rumore di fase può essere valutato considerando l'andamento in frequenza dello spettro del rumore.
- In prossimità di ω_0 prevale il rumore Flicker e lo spettro vale:

$$S_{\varphi\varphi}(\omega) \propto \left(\frac{\omega_0}{S_F}\right)^2 \frac{1}{\omega^3}$$

- Dopo la frequenza di corner prevale il rumore bianco:

$$S_{\varphi\varphi}(\omega) \propto \left(\frac{\omega_0}{S_F}\right)^2 \frac{F \cdot k_B \cdot T}{\omega^2}$$

35

Il rumore di fase negli oscillatori - 12

- Al di fuori della banda della rete sfasatrice, il rumore non viene 'filtrato', non si può utilizzare l'espressione derivata dal coefficiente di stabilità in frequenza S_F , e lo spettro del rumore di fase resta bianco.

$$S_{\varphi\varphi}(\omega) = \frac{2 \cdot F \cdot k_B \cdot T}{S}$$

- Infine al di fuori della banda passante dell'amplificatore il rumore viene tagliato dai poli della risposta in frequenza dell'amplificatore stesso (20 dB/dec se è a singolo polo).

36

Il rumore di fase nel PLL - 1

- Si supponga di partire da una condizione di aggancio e di introdurre un rumore a spettro bianco con banda B.
- Dalle funzioni di trasferimento determinate per il PLL si ottiene:

$$\varphi_v(s) = H(s) \cdot \varphi_i(s)$$

- e in definitiva lo spettro di densità di potenza complessivo del rumore di fase:

$$S_{\varphi\varphi}^v(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_{\varphi\varphi}^i(s) = |H(j\omega)|^2 \cdot \frac{N}{2SB}$$

37

Il rumore di fase nel PLL - 2

- Il rumore di fase in uscita dipende pertanto dalla funzione di trasferimento del PLL. Riassumiamo i risultati ottenuti:

– Senza filtro:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(K_p \cdot K_v)^2}{\omega^2 + (K_p \cdot K_v)^2}$$

– Filtro RC:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega_n^4}{(\omega^2 - \omega_n^2) + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_n^2}$$

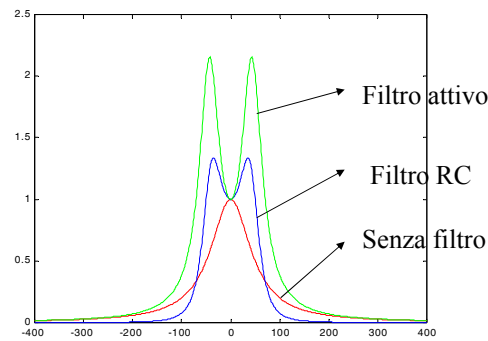
– Filtro attivo:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega_n^2 \cdot (4 \cdot \xi^2 \cdot \omega^2 + \omega_n^2)}{(\omega^2 - \omega_n^2) + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega^2 \cdot \omega_n^2}$$

38

Il rumore di fase nel PLL - 3

- L'andamento dello spettro d'uscita mette in evidenza il funzionamento da 'filtro' per il rumore del PLL:



39

Il rumore di fase nel PLL - 4

- In particolare se si considera un filtro attivo, si ottiene per la potenza di rumore in uscita:

$$\overline{\varphi_v^2}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N}{2SB} \cdot |H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N}{2SB} \cdot \frac{\omega_n}{2} \cdot \left(\xi + \frac{1}{4\xi} \right)$$

- Pertanto si ottiene una compressione della potenza di rumore in uscita di un fattore ω_n/B (si considera $\xi = 0.5$):

$$\overline{\varphi_i^2}(t) = \frac{N}{2S} \frac{B_n}{B}$$

40