## Capitolo 11

## Amplificatori a microonde

## 11.1 Introduzione

In questo capitolo verranno esposti alcuni criteri per il progetto di amplificatori a microonde utilizzanti componenti attivi allo stato solido. Preliminarmente sono analizzati i parametri che caratterizzano gli amplificatori; lo studio prosegue con la descrizione del dimensionamento di alcuni tipici amplificatori per piccoli segnali a singolo stadio e a banda stretta e con la descrizione dell'amplificatore distribuito a banda larga.

## 11.2 Amplificatori a stato solido

Un segnale a microonde può essere amplificato utilizzando tubi a vuoto o dispositivi allo stato solido. I tubi a vuoto, quali i klystron e i tubi ad onda progressiva (Travelling Wave Tube - TWT), sono in grado di erogare potenze in onda continua (CW) fino a circa  $10^6$  W ad 1 GHz <sup>(\*)</sup>, mentre i dispositivi allo stato solido vengono utilizzati, alla stessa frequenza ed in classe A, per potenze dell'ordine delle centinaia di Watt (Pf<sup>2</sup> = 5×10<sup>3</sup> W·GHz<sup>2</sup> – limite teorico per MESFET <sup>(\*\*)</sup>). Tuttavia mentre i tubi a vuoto sono pesanti, ingombranti e richiedono elevate tensioni di alimentazione, i dispositivi a stato solido lavorano con tensioni di alimentazione più basse (1 - 15 V) e hanno il grande vantaggio di essere compatti, leggeri ed affidabili.

I componenti attivi utilizzati negli amplificatori allo stato solido sono generalmente di due tipi:

- componenti a due terminali, (Gunn, Impatt)

- componenti a tre terminali, (BJT, MESFET, HEMT, HBT)

Gli amplificatori che utilizzano componenti del primo tipo vengono detti a "riflessione" o a "resistenza negativa", mentre, gli amplificatori del secondo tipo vengono detti a "trasmissione".

<sup>(\*)</sup> E.A. Wolff, R. Kaul, Microwave engineering and systems applications, John Wiley & Son, 1989.

<sup>(\*\*)</sup> G.D. Vendelin, A.M. Pavio, U.L. Rohde, Microwave circuit design using linear and nonlinear techniques, John Wiley & Son, 1989.



Fig. 11.1





In un amplificatore a riflessione (Fig. 11.1) il segnale del generatore arriva sul diodo (resistenza negativa) ma, per le proprietà del circolatore, non si trasferisce verso il carico. Il segnale, riflesso ed amplificato dal diodo, arriva sul carico senza interferire con il generatore.

Negli amplificatori a trasmissione (Fig. 11.2) si aggiungono al transistor delle reti in ingresso ed in uscita per ottenere il comportamento desiderato (elevato guadagno, basso rumore, etc.).

Nel seguito l'analisi sarà limitata agli amplificatori a trasmissione; dopo aver introdotto i parametri che si utilizzano per caratterizzare e progettare questi amplificatori (stabilità, guadagno, fattore di rumore, etc,) si svilupperà il progetto di alcuni tipici amplificatori a singolo stadio di bassa potenza e a banda stretta. Il capitolo si chiude con la descrizione dell'amplificatore distribuito in grado di operare su un ampio intervallo di frequenze.

#### 11.3 Stabilità

Un transistor può comportarsi come un oscillatore qualora si aggiunga ad esso un anello di retroazione (feedback). Tuttavia, feedback interni associati agli elementi parassiti possono portare ad oscillare un transistor anche non retroazionato. Nel seguito verranno esposti alcuni criteri per valutare la stabilità di un transistor a microonde basati sulle circonferenze di stabilità, sul fattore di Rollet, e sul criterio di Nyquist.

## 11.3.a Valutazione della stabilità in base alle circonferenze di stabilità

La stabilità di un transistor a microonde può essere analizzata utilizzando lo schema di Fig. 11.3, in cui il dispositivo attivo viene rappresentato attraverso la matrice [S]. In particolare in Fig. 11.3 si considera una tipica configurazione finale dell'amplificatore in cui al transistor sono state aggiunte reti di adattamento reattive in ingresso ed in uscita (reactive matching).



Fig. 11.3

Per studiare la stabilità del transistor si può inizialmente vedere l'effetto del carico sul coefficiente di riflessione in ingresso al transistore ( $\Gamma_{IN}$ ) e, dualmente, l'effetto della sorgente sul coefficiente di riflessione in uscita ( $\Gamma_{OUT}$ ). I citati coefficienti di riflessione sono esprimibili come:

$$\Gamma_{\rm IN} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_{\rm L}}{1 - S_{22}\Gamma_{\rm L}}$$
(11.1)

$$\Gamma_{\text{OUT}} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_{\text{S}}}{1 - S_{11}\Gamma_{\text{S}}}$$
(11.2)

Affinché II transistor risulti stabile deve aversi, a tutte le frequenze d'uso:

$$|\Gamma_{\rm IN}| < 1 \tag{11.3}$$

Infatti, con riferimento alla Fig. 11.3, se il modulo del coefficiente di riflessione in ingresso fosse maggiore dell'unità (impedenza con parte reale negativa) il dispositivo attivo rifletterebbe in ingresso più potenza di quanta ne abbia inviata il generatore indicando un evidente comportamento instabile<sup>(\*)</sup>.

La condizione limite tra stabilità ed instabilità è quindi individuata dalle curve corrispondenti a  $|\Gamma_{IN}| = 1$  e  $|\Gamma_{OUT}| = 1$  nei piani complessi  $\Gamma_L$  e  $\Gamma_S$ .

Con riferimento all'ingresso la condizione  $|\Gamma_{IN}|$  = 1 si scrive:

$$\left| S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \right| = 1$$
 (11.5)

Sviluppando la (11.5) si ottiene:

$$\left|\frac{S_{11}(1 - S_{22}\Gamma_{L}) + S_{12}S_{21}\Gamma_{L}}{1 - S_{22}\Gamma_{L}}\right| = \left|\frac{S_{11} - \Delta\Gamma_{L}}{1 - S_{22}\Gamma_{L}}\right| = 1$$
(11.6)

dove  $\Delta$  è il determinante della matrice di scattering:

$$\Delta = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} \tag{11.7}$$

Le cose non cambiano se considero la condizione  $|\Gamma_{IN}|^2=1$  da cui segue:

$$\left|\frac{S_{11} - \Delta\Gamma_{L}}{1 - S_{22}\Gamma_{L}}\right|^{2} = \frac{(S_{11} - \Delta\Gamma_{L})(S_{11} - \Delta\Gamma_{L})^{*}}{(1 - S_{22}\Gamma_{L})(1 - S_{22}\Gamma_{L})^{*}} = 1$$
(11.8)

e quindi:

$$S_{11}S_{11}^{*} - S_{11}\Gamma_{L}^{*}\Delta^{*} - \Gamma_{L}\Delta S_{11}^{*} + \Gamma_{L}\Gamma_{L}^{*}\Delta\Delta^{*} = 1 - S_{22}^{*}\Gamma_{L}^{*} - \Gamma_{L}S_{22} + S_{22}S_{22}^{*}\Gamma_{L}\Gamma_{L}^{*} (11.9)$$
  
$$\Gamma_{L}\Gamma_{L}^{*}(|\Delta|^{2} - |S_{22}|^{2}) - \Gamma_{L}(\Delta S_{11}^{*} - S_{22}) - \Gamma_{L}^{*}(\Delta^{*}S_{11} - S_{22}^{*}) = 1 - |S_{11}|^{2}$$
(11.10)

$$\Gamma_{L}\Gamma_{L}^{*} - \frac{\Gamma_{L}(\Delta S_{11}^{*} - S_{22})}{2} - \frac{\Gamma_{L}^{*}(\Delta^{*}S_{11} - S_{22}^{*})}{2} = \frac{1 - |S_{11}|^{2}}{2}$$
(11.11)

$$\Gamma_{L}\Gamma_{L}^{*} - \frac{\Gamma_{L}(\Delta S_{11}^{*} - S_{22})}{(|\Delta|^{2} - |S_{22}|^{2})} - \frac{\Gamma_{L}^{*}(\Delta^{*}S_{11} - S_{22}^{*})}{(|\Delta|^{2} - |S_{22}|^{2})} = \frac{1 - |S_{11}|^{-1}}{(|\Delta|^{2} - |S_{22}|^{2})}$$
(11.11)

<sup>(\*)</sup> Si noti che il criterio di stabilità basato sulle (10.3) e (10.4) è un criterio per l'analisi della stabilità che si applica ad un circuito già esistente.

Confrontando la (11.11) con l'equazione di una circonferenza nel piano complesso<sup>(\*)</sup> si vede che la (11.5) dà luogo a delle circonferenze nel piano complesso  $\Gamma_L$  (circonferenza di stabilità in uscita) aventi centro e raggio dati da:

$$w_{L} = \frac{S_{22}^{*} - \Delta^{*}S_{11}}{|S_{22}|^{2} - |\Delta|^{2}}$$
(11.12)  
$$r_{L} = \frac{|S_{12}S_{21}|}{||S_{22}|^{2} - |\Delta|^{2}|}$$
(11.13)

Analogamente, partendo dalla  $|\Gamma_{OUT}| = 1$  si ottengono delle circonferenze nel piano  $\Gamma_S$  (circonferenze di stabilità in ingresso) di centro e raggio dati da:

$$w_{S} = \frac{S_{11}^{*} - \Delta^{*}S_{22}}{\left|S_{11}\right|^{2} - \left|\Delta\right|^{2}}$$
(11.14)

$$\mathbf{r}_{S} = \frac{\left| \mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{21} \right|}{\left\| \mathbf{S}_{11} \right\|^{2} - \left| \Delta \right|^{2}}$$
(11.15)

Una volta tracciate le circonferenze di stabilità occorre verificare se la regione stabile è quella all'interno o quella al di fuori delle circonferenze. Per fare questo conviene considerare l'origine del piano complesso; in questo punto la (11.3) diventa semplicemente  $|S_{11}| < 1$ , se questa condizione è verificata (come accade quasi sempre) la regione che comprende l'origine è quella stabile. Determinata la porzione di piano che garantisce la stabilità del transistor (cioè  $|\Gamma_{IN}| < 1$  e  $|\Gamma_{OUT}| < 1$ ) si può procedere alla sintesi della rete di adattamento, scegliendo valori di  $\Gamma_{S}$  e  $\Gamma_{L}$  che assicurano la stabilità.

Nella Fig. 11.4 vengono mostrate le circonferenze di stabilità nel piano  $\Gamma_{\rm S}$  relative a tre generici transistor ad una determinata frequenza. Il primo (a) è incondizionatamente stabile infatti ogni carico fisicamente realizzabile, cioè all'interno della circonferenza di raggio unitario, dà luogo ad un amplificatore stabile. Il secondo (b) è condizionatamente stabile e la circonferenza di stabilità è all'interno di quella di raggio unitario, quindi esistono dei carichi fisicamente realizzabili che rendono l'amplificatore stabile ma per altri carichi questo non

$$|w - w_0|^2 = r^2$$

e quindi:

$$ww^* - (w_0w^* + ww_0^*) + w_0w_0^* = r^2$$

<sup>(\*)</sup> Nel piano complesso (w = u + jv) l'equazione

rappresenta una circonferenza con centro in  $w_0 = u_0 + jv_0$  e raggio r. Sviluppando si ottiene l'equazione:  $(w - w_0)(w - w_0)^* = r^2$ 



Fig. 11.4

accade. Il terzo è condizionatamente stabile (c) e la circonferenza di stabilità interseca quella di raggio unitario.

Si deve notare che per un determinato transistor  $r_S e w_S$  variano con la frequenza e quindi al variare della frequenza lo stesso transistor può passare dalla situazione "a" a quella "b" o "c" e viceversa. Inoltre quanto detto nel piano  $\Gamma_S$  deve essere ripetuto per il piano  $\Gamma_L$  <sup>(\*)</sup>.

<sup>(\*)</sup> Si noti che il criterio di stabilità basato sulle circonferenze di di Fig. 11.4 è un criterio per la sintesi della stabilità. Con questo criterio si individuano le regioni nelle quali è possibile posizionare i carichi e lo si può quindi utilizzare per il progetto di un circuito stabile.

#### 11.3.b Valutazione della stabilità tramite il fattore di Rollet

Un approccio alternativo a quello visto consiste nel considerare il criterio di stabilità di Rollet<sup>(\*)</sup>. La teoria di Rollet si basa sull'introduzione di due coefficienti legati ai parametri di scattering del transistor. Il fattore di Rollet K ed il determinante della matrice di scattering definiti come:

$$K = \frac{1 + |\Delta|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2|S_{12}||S_{21}|}$$

$$\Delta = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}$$
(11.16)

In particolare se risulta:

il transistor è incondizionatamente stabile, cioè qualsiasi coppia di carichi  $\Gamma_{S}$  e  $\Gamma_{L}$  rende l'amplificatore stabile. Come detto in precedenza, questa condizione equivale ad avere la circonferenza di stabilità tutta al di fuori di quella di fisica realizzabilità (Fig. 11.4.a).

Se invece risulta:

il transistor è condizionatamente stabile. In questo caso la circonferenza di stabilità è tutta dentro quella di fisica realizzabilità (Fig. 11.4.b) e quindi alcuni valori di  $\Gamma_{\rm S}$  e  $\Gamma_{\rm L}$  possono dar luogo ad instabilità.

Se risulta:

$$-1 < K < 1$$
 (11.19)

il transistor è, anche in questo caso, condizionatamente stabile. In questo caso la circonferenza di stabilità interseca quella di fisica realizzabilità (Fig. 11.4.c) e quindi di nuovo alcuni valori di  $\Gamma_{\rm S}$  e  $\Gamma_{\rm L}$  possono dar luogo ad instabilità.

Infine se risulta:

il transistor è intrinsecamente instabile e quindi non può essere utilizzato come amplificatore.

<sup>&</sup>lt;sup>(\*)</sup> J.M. Rollet, Stability and power gain invariants of linear ports, IRE Trans. Circ. Theory, vol. 9, 1962.

#### 11.3.c Valutazione della stabilità tramite il criterio di Nyquist

Per una rete due porte Rollet ha mostrato che condizione necessaria e sufficiente per la stabilità incondizionata è che sia verificata la (11.17). Tuttavia nella formulazione originale Rollet aveva aggiunto l'ulteriore condizione che i poli della rete due porte sotto esame, chiusa su impedenze o ammettenze infinite, si dovevano trovare nel semipiano di sinistra (LHP) del piano complesso (condizione di Rollet). Nei CAD in commercio quest'ultima condizione è spesso trascurata e questo può dar luogo, in alcuni casi, ad errori. Ciò è particolarmente vero quando si hanno stadi multipli in cascata o comunque topologie circuitali di una certa complessità <sup>(\*)</sup>.

Un modo semplice e sempre corretto per verificare la stabilità di un circuito è quello di riferirsi al criterio di Nyquist <sup>(\*\*)</sup> già introdotto per gli oscillatori.

Nel seguito sarà implicitamente assunta un'ipotesi: i componenti attivi di base sono stabili se terminati su 50  $\Omega$ .

La parte attiva di un amplificatore a microonde è generalmente costituita da un transistor del quale si conoscono i parametri di scattering misurati rispetto ad un riferimento (50  $\Omega$ ) (Fig. 11.5). Dal momento che è stato possibile effettuare tali misure, possiamo ritenere che il transistor, terminato sui carichi di riferimento, sia stabile (catena chiusa) (P<sub>CH0</sub>=0). Essendo inoltre i coefficienti di riflessione del generatore ( $\Gamma_{cin}$ ) e del carico ( $\Gamma_{cout}$ ) uguali a zero, anche il prodotto  $\Gamma_d \Gamma_c$  all'ingresso e all'uscita del transistor sarà uguale a zero. Questo vuol dire che N<sub>g0</sub> = 0 e il numero dei poli con parte reale positiva della funzione di trasferimento a catena aperta risulta uguale a quello della funzione di trasferimento a catena chiusa, ovvero zero ( $P_{AP0}$ =0).



Fig. 11.5

<sup>&</sup>lt;sup>(\*)</sup> Il fatto che i parametri di scattering di un transistor siano misurati dal costruttore, implica per essi l'assenza di poli nel semipiano destro. Tuttavia, la presenza delle reti di adattamento in ingresso ed in uscita può rendere il transistor instabile.

<sup>(\*\*)</sup> A. Lepschy e Ruberti, Lezioni di controlli automatici, Siderea Rome, 1967.

Nel progetto degli amplificatori a microonde si inseriscono in ingresso ed in uscita al transistor delle reti di adattamento che danno luogo a nuovi  $\Gamma_{cin}$  e  $\Gamma_{cout}$ . Una volta progettate queste reti, sulla base delle specifiche richieste, la verifica della stabilità può essere eseguita considerando inizialmente una sola rete di adattamento, ad esempio quella di ingresso (Fig. 11.6); in questo caso  $\Gamma_{din}$  è uguale a quello del transistor di partenza e quindi non ha poli con parte reale positiva. Essendo inoltre la rete di adattamento passiva anche il prodotto  $\Gamma_{cin} \Gamma_{din}$  non ha poli con parte reale positiva e quindi  $P_{AP1} = 0$ . L'analisi della stabilità viene effettuata tramite il criterio di Nyquist (ridotto) valutando il numero dei giri intorno al punto critico (1, j0) che eventualmente la funzione a catena aperta  $\Gamma_{cin} \Gamma_{din}$  compie nel diagramma polare; i giri in senso orario rappresentano il numero dei poli con parte reale positiva (P<sub>CH1</sub> = N<sub>g1</sub>).



Fig. 11.6

Considerando adesso l'uscita del transistor, la funzione di trasferimento a catena chiusa in uscita deve avere lo stesso numero dei poli con parte reale positiva della funzione di trasferimento a catena chiusa in ingresso (le due funzioni di trasferimento a catena chiusa sono relative allo stesso circuito) e quindi  $P'_{CH2} = P_{CH1}$ . Essendo inoltre  $\Gamma_{cout} = 0$  sarà anche  $N'_{g2} = 0$  e quindi  $P'_{AP2} = P'_{CH2} = N_{g1}$ . Viene quindi inserita la rete di adattamento di uscita (Fig. 11.7); questa volta l'analisi della stabilità viene condotta tramite il criterio di Nyquist generale valutando il numero dei giri intorno al punto critico che la funzione a catena aperta relativa al prodotto  $\Gamma_{dout}$   $\Gamma_{cout}$  compie nel diagramma polare (N<sub>g2</sub>). In questa situazione si ha:

$$P_{CH2} = P_{AP2} + N_{g2} = P'_{AP2} + N_{g2} = N_{g1} + N_{g2}$$
(11.21)

Dove si è posto  $P_{AP2} = P'_{AP2}$  in quanto si è aggiunta una rete passiva. Se risulta:  $N_{g1} + N_{g2} = 0$ ; l'amplificatore è stabile.



Fig. 11.7

In sintesi, la verifica della stabilità per un amplificatore ad uno stadio viene condotta aggiungendo in sequenza le 2 reti di adattamento e valutando il numero dei giri che le 2 funzioni di trasferimento a catena aperta  $\Gamma_{din} \Gamma_{cin}$  (con il transistor chiuso direttamente su 50  $\Omega$  in uscita) e  $\Gamma_{dout} \Gamma_{cout}$  (con il transistor terminato con le due reti di adattamento) compiono intorno al punto critico (1, j0), considerati positivi in senso orario. L'amplificatore risulta stabile se e solo se la somma algebrica dei giri delle 2 funzioni è uguale a zero.

Lo studio della stabilità con il criterio di Nyquist risulta più generale ed è in grado di rivelare, in alcuni casi, delle instabilità non prevedibili con il criterio di Rollet <sup>(\*)</sup>.

In un transistor unilatero  $S_{12}$  è nullo a tutte le frequenze, pertanto l'amplificatore è incondizionatamente stabile. Viceversa se  $S_{12} \neq 0$  e se il dispositivo attivo non verifica la condizione di stabilità incondizionata a tutte le frequenze, l'amplificatore è potenzialmente instabile, e bisogna progettare delle reti di adattamento in ingresso ed in uscita (v. Fig. 11.3) tali da garantire il suo funzionamento stabile. E' inoltre importante verificare che l'amplificatore sia stabile per tutte le frequenze, sia quelle di lavoro che quelle fuori della banda d'uso ( $|\Gamma|_{IN} < 1 e |\Gamma|_{OUT} < 1 a tutte le frequenze).$ 

## 11.4 Guadagno e adattamento

In Fig. 11.8 è mostrato un amplificatore caratterizzato tramite la sua matrice di scattering [S]. In figura è anche mostrato il generatore ( $V_G$ ) con impedenza interna  $Z_G$  seguito dalla rete di adattamento in ingresso ed il carico con impedenza  $Z_C$  preceduto dalla rete di adattamento di uscita.

<sup>&</sup>lt;sup>(\*)</sup> S. Pisa, M. Zolesi, A method for stability analysis of small signal microwave amplifiers, International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering, vol. 8:4, pp. 293-302, 1999.



#### Fig. 11.8

L'effetto delle reti di adattamento è quello di trasformare l'impedenza del generatore e del carico (tipicamente 50 $\Omega$ ) in delle impedenze (Z<sub>S</sub> e Z<sub>L</sub>) poste all'ingresso e all'uscita del transistor e dimensionate al fine di ottenere un desiderato comportamento.

Per una rete due porte alimentata da un generatore con impedenza interna  $Z_S$  e chiusa su di un carico con impedenza  $Z_L$  si definiscono tre tipi di guadagni: il guadagno di trasduzione  $G_T$ , il guadagno di potenza  $G_P$ , ed il guadagno disponibile  $G_D$ , le cui definizioni sono riportate nel seguito.

$$G_{T} = \frac{\text{Potenza erogata dalla rete due porte al carico}}{\text{Potenza disponibile del generatore}} = \frac{P_{L}}{P_{AVS}}$$
(11.22)

$$G_{P} = \frac{Potenza erogata dalla rete due porte al carico}{Potenza erogata dal generatore} = \frac{P_{L}}{P_{S}}$$
(11.23)

$$G_{D} = \frac{\text{Potenza disponibile della rete due porte}}{\text{Potenza disponibile del generatore}} = \frac{P_{AVL}}{P_{AVS}}$$
(11.24)

Essendo  $P_{AVS} > P_S$  risulta  $G_P > G_T$ , ed essendo  $P_{AVL} > P_L$  risulta anche  $G_D > G_T$ .

Come sarà chiaro nel seguito, tra i vari guadagni quello di trasduzione è quello che meglio si presta a caratterizzare l'amplificatore per cui nel seguito si valuterà l'espressione di questo guadagno in funzione dei parametri del circuito di Fig. 11.8.

La potenza che il generatore in ingresso ( $V_S$ ,  $Z_S$ ) può fornire al transistor è:

$$P_{IN} = \frac{1}{8} \frac{|V_{S}|^{2}}{Z_{0}} \frac{|1 - \Gamma_{S}|^{2}}{|1 - \Gamma_{S}\Gamma_{L}|^{2}} \left(1 - |\Gamma_{IN}|^{2}\right)$$
(11.25)

Si definisce potenza disponibile del generatore quella che il generatore fornisce al carico nel caso in cui  $\Gamma_{IN} = \Gamma_{S}^{*}$  Con questa ipotesi la (11.25) diventa:

$$P_{AVS} = \frac{1}{8} \frac{|V_{S}|^{2}}{Z_{0}} \frac{|1 - \Gamma_{S}|^{2}}{|1 - |\Gamma_{S}|^{2}|}$$
(11.26)

Per quanto riguarda la potenza ( $P_L$ ) fornita al carico dalla rete due porte per il suo calcolo è possibile utilizzare il grafo di flusso relativo al circuito di Fig. 11.8 e riportato in Fig. 11.9.



Fig. 11.9

La potenza che la rete fornisce al carico è data da:

$$\mathsf{P}_{\mathsf{L}} = \frac{1}{2\mathsf{Z}_{0}} |\mathbf{a}_{\mathsf{L}}|^{2} \left(1 - |\Gamma_{\mathsf{L}}|^{2}\right) \tag{11.27}$$

dove:

a<sub>∟</sub> = T b

con T funzione di trasferimento tra i nodi **b** ed  $\mathbf{a}_{L}$ . Utilizzando la formula di Mason si ottiene:

$$T = \frac{S_{21}}{1 - \Gamma_{S}S_{11} - \Gamma_{L}S_{22} - \Gamma_{S}\Gamma_{L}S_{21}S_{12} + \Gamma_{S}\Gamma_{L}S_{11}S_{22}}$$
(11.28)

e quindi si ha:

$$P_{L} = \frac{\frac{1}{8Z_{0}} |\mathbf{V}_{S}|^{2} |1 - \Gamma_{S}|^{2} |S_{21}|^{2} (1 - |\Gamma_{L}|^{2})}{|1 - \Gamma_{S}S_{11} - \Gamma_{L}S_{22} - \Gamma_{S}\Gamma_{L}S_{21}S_{12} + \Gamma_{S}\Gamma_{L}S_{11}S_{22}|^{2}} \quad (11.29)$$

Per il guadagno di trasduzione si ottiene quindi l'espressione:

$$G_{T} = \frac{|S_{21}|^{2} (1 - |\Gamma_{S}|^{2}) (1 - |\Gamma_{L}|^{2})}{|(1 - S_{11}\Gamma_{S}) (1 - S_{22}\Gamma_{L}) - S_{12}S_{21}\Gamma_{S}\Gamma_{L}|^{2}}$$
(11.30)

Come si vede il guadagno di trasduzione dipende dal generatore ( $\Gamma_S$ ), dalla rete due porte [S] e dal carico ( $\Gamma_L$ )).

Una volta realizzato l'amplificatore, con il transistor e le reti di adattamento, si ottiene una rete due porte della quale posso misurare i parametri di scattering S'<sub>11</sub>, S'<sub>21</sub>, S'<sub>12</sub>, S'<sub>22</sub>, chiudendo le due bocche su carichi adattati. In questo caso è quindi verificata la condizione  $\Gamma_L = \Gamma_S = 0$ , ovvero  $Z_S = Z_L = Z_0$ , e quindi  $G_T = |S'_{21}|^2$ . Questo vuol dire che il parametro  $|S'_{21}|^2$  dell'amplificatore finale coincide con il guadagno di trasduzione. Poiché gli analizzatori di reti sono in grado di misurare questo parametro, la previsione teorica del guadagno di trasduzione può essere confrontata con il valore che verrà misurato.

Anche il guadagno di potenza ed il guadagno disponibile possono essere espressi in funzione dei parametri di scattering e si ha:

$$G_{P} = \frac{1}{1 - |\Gamma_{IN}|^{2}} |S_{21}|^{2} \frac{1 - |\Gamma_{L}|^{2}}{|1 - S_{22}\Gamma_{L}|^{2}}$$
(11.31)

$$G_{D} = \frac{1 - |\Gamma_{S}|^{2}}{|1 - S_{11}\Gamma_{S}|^{2}} |S_{21}|^{2} \frac{1}{1 - |\Gamma_{OUT}|^{2}}$$
(11.32)

Come si vede il guadagno di potenza dipende solo da  $\Gamma_L$  mentre quello disponibile dipende solo da  $\Gamma_S$ .

Nel progetto degli amplificatori, oltre al guadagno è importante valutare l'adattamento in ingresso e in uscita. A tal fine si introducono le perdite di disadattamento in ingresso e in uscita date da:

$$ML_{IN} = \frac{P_{AVS}}{P_{S}} = \frac{G_{P}}{G_{T}} = \frac{\left|1 - \Gamma_{S}\Gamma_{IN}\right|^{2}}{\left(1 - \left|\Gamma_{S}\right|^{2}\right)\left(1 - \left|\Gamma_{IN}\right|^{2}\right)}$$
(11.33)

$$ML_{OUT} = \frac{P_{AVL}}{P_{L}} = \frac{G_{D}}{G_{T}} = \frac{|1 - \Gamma_{L}\Gamma_{OUT}|^{2}}{(1 - |\Gamma_{L}|^{2})(1 - |\Gamma_{OUT}|^{2})}$$
(11.34)

Essendo  $P_{AVS} \ge P_S$  e  $P_{AVL} \ge P_L$ ,  $ML_{IN}$  e  $ML_{OUT}$  sono quantità sempre maggiori o uguali ad 1.

Si noti che se risulta:

$$\Gamma_{\rm IN} = \Gamma_{\rm S}^* \text{ si ha } ML_{\rm IN} = 1 \text{ e } G_{\rm T} = G_{\rm P}$$
(11.35)

mentre se risulta:

$$\Gamma_{OUT} = \Gamma_L^* \text{ si ha } ML_{OUT} = 1 \text{ e } G_T = G_D$$
(11.36)

Se infine risulta:

$$\Gamma_{\text{IN}} = \Gamma_{\text{S}}^{*} e \Gamma_{\text{OUT}} = \Gamma_{\text{L}}^{*} \text{ si ha } G_{\text{D}} = G_{\text{P}} = G_{\text{T}} = G_{\text{TMAX}} \quad (11.37)$$

con G<sub>TMAX</sub> guadagno di trasduzione massimo.

Una volta realizzato l'amplificatore, la rete due porte ottenuta può essere misurata chiudendo le due porte su carichi adattati. In questo caso risulta:

$$ML_{IN} = \frac{1}{1 - |\Gamma'_{IN}|^2}$$
(11.38)

$$ML_{OUT} = \frac{1}{1 - |\Gamma'_{OUT}|^2}$$
(11.39)

dove  $\Gamma'_{IN} \in \Gamma'_{OUT}$  sono i coefficienti di riflessione dell'amplificatore finale. In base alle (11.33)-(11.34)-(11.38)-(11.39) e con alcuni passaggi si trova:

$$\left|\Gamma'_{\text{IN}}\right| = \left|\frac{\Gamma_{\text{IN}} - \Gamma_{\text{S}}^{*}}{1 - \Gamma_{\text{S}}\Gamma_{\text{IN}}}\right|$$

$$\left|\Gamma'_{\text{OUT}}\right| = \left|\frac{\Gamma_{\text{OUT}} - \Gamma_{\text{L}}^{*}}{1 - \Gamma_{\text{OUT}}\Gamma_{\text{L}}}\right|$$
(11.40)

Da cui si vede che se si realizza la condizione di adattamento coniugato in ingresso e in uscita oltre ad avere il massimo guadagno di trasduzione si ha anche un perfetto adattamento alle porte. Diversamente le (11.40) possono essere utilizzate per calcolare il disadattamento. Si noti che le (11.40) sono importanti anche perché i parametri  $\Gamma'_{OUT} \in \Gamma'_{IN}$  sono quantità misurabili.

#### 11.4.a Guadagno massimo per un transistor unilatero

Si vogliono ora mostrare alcuni criteri per il dimensionamento di un amplificatore iniziando con il caso in cui il dispositivo attivo possa essere considerato unilaterale (cioè  $S_{12}=0$ ). In questo caso, il guadagno di trasduzione viene chiamato unilatero ( $G_{TU}$ ) e si ha.

$$G_{TU} = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_S|^2) (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_S) (1 - S_{22}\Gamma_L)^2}$$
(11.41)

Il guadagno di trasduzione unilatero è esprimibile come il prodotto di tre termini:

$$G_{TU} = G_0 G_1 G_2 \tag{11.42}$$

dove:

$$G_0 = |S_{21}|^2$$
(11.43)

rappresenta il guadagno di trasduzione unilatero con generatore e carico adattati  $\Gamma_{S} = \Gamma_{L} = 0$ ),

$$G_{1} = \frac{1 - |\Gamma_{S}|^{2}}{|1 - \Gamma_{S}S_{11}|^{2}}$$
(11.44)

rappresenta il guadagno o l'attenuazione dovuti all'adattamento tra generatore e amplificatore e:

$$G_{2} = \frac{1 - |\Gamma_{L}|^{2}}{|1 - \Gamma_{L}S_{22}|^{2}}$$
(11.45)

rappresenta il guadagno o l'attenuazione dovuti all'adattamento tra carico e amplificatore.

La presenza dei termini  $G_1 e G_2$  nel guadagno di trasduzione è dovuta al fatto che il parametro  $S_{21}$  del transistor è valutato in condizioni di chiusura su carichi di impedenza pari a  $Z_0$  (tipicamente 50  $\Omega$ ). Questa chiusura non è quella ottimale per ottenere il massimo guadagno; i termini  $G_1 e G_2$  tengono conto proprio dell'effetto di una differente chiusura. In particolare si vede che modificando opportunamente l'impedenza del generatore e del carico si riesce ad aumentare il guadagno del transistor rispetto al contributo dato da  $|S_{21}|^2$ .

Il guadagno di trasduzione unilatero è massimizzabile scegliendo opportunamente i valori dei coefficienti di riflessione  $\Gamma_S \in \Gamma_L$ . In particolare il guadagno è massimo se si verificano le condizioni di adattamento coniugato in ingresso ed uscita:

$$\Gamma_{\mathsf{S}} = \mathsf{S}_{11}^*$$

$$\Gamma_{\mathsf{L}} = \mathsf{S}_{22}^*$$
(11.46)

In queste condizioni  $G_{TU}$  viene detto MUG (Maximum Unilateral Gain), cioè Massimo Guadagno Unilatero (si ha:  $G_T = G_P = G_D$ ):

$$MUG = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1}{1 - |S_{22}|^2}$$
(11.47)

Il progetto di un amplificatore a singolo componente attivo consiste quindi nella scelta del transistor (Fig. 11.8) con l'aggiunta delle reti di adattamento di ingresso ed uscita. Queste reti sono progettate al fine di realizzare o il massimo guadagno ad una fissata frequenza (MUG) o un guadagno uniforme su di una assegnata banda.

In pratica le reti di adattamento in ingresso ed in uscita servono a modificare i coefficienti di riflessione  $\Gamma_{G}$  e  $\Gamma_{C}$  di generatore e carico per ottenere

due nuovi coefficienti  $\Gamma_S \in \Gamma_L$  che determinino il desiderato valore di  $G_{TU}$  deciso in fase di progetto.

Per il progetto delle reti di adattamento di ingresso e di uscita è utile mostrare sulla carta di Smith l'andamento del guadagno  $G_1$  in funzione del nuovo coefficiente di riflessione del generatore  $\Gamma_S$  e  $G_2$  in funzione del nuovo coefficiente di riflessione del carico  $\Gamma_L$ .

Cominciamo col vedere la prima situazione.

In base alla 11.44 si ha:

$$G_{1} = \frac{1 - \Gamma_{S} \Gamma_{S}^{*}}{(1 - \Gamma_{S} S_{11})(1 - \Gamma_{S} S_{11})^{*}}$$
(11.48)

e quindi:

$$(1 - \Gamma_{\rm S} S_{11})(1 - \Gamma_{\rm S} S_{11})^* G_1 = 1 - \Gamma_{\rm S} \Gamma_{\rm S}^*$$
 (11.49)

da cui si ottiene:

$$\Gamma_{\rm S}\Gamma_{\rm S}^* - \frac{\left(\Gamma_{\rm S}S_{11} + \Gamma_{\rm S}^*S_{11}^*\right)}{\left(1 + G_1 |S_{11}|^2\right)}G_1 = \frac{1 - G_1}{\left(1 + G_1 |S_{11}|^2\right)}$$
(11.50)

Confrontando la (11.50) con l'equazione di una circonferenza nel piano complesso si ha:

$$w = \Gamma_{S}$$
(11.51)

$$w_{0} = \frac{S_{11}^{*}G_{1}}{1 + G_{1}|S_{11}|^{2}}$$
(11.52)

$$r^{2} - w_{0}w_{0}^{*} = \frac{1 - G_{1}}{1 + G_{1}|S_{11}|^{2}}$$
 (11.53)

La (11.53) considerando la (11.52) diventa:

$$r^{2} = \frac{\left|S_{11}\right|^{2}G_{1}^{2}}{\left(1 + G_{1}\left|S_{11}\right|^{2}\right)^{2}} + \frac{1 - G_{1}}{1 + G_{1}\left|S_{11}\right|^{2}} = \frac{1 - G_{1}\left(1 - \left|S_{11}\right|^{2}\right)}{\left(1 + G_{1}\left|S_{11}\right|^{2}\right)^{2}}$$
(11.54)

Quindi nel piano di  $\Gamma_S$  i punti a G<sub>1</sub> costante si mappano in circonferenze con centro in w<sub>0</sub> e raggio r come mostrato in Fig. 11.10.

Le circonferenze di raggio minore corrispondono a valori di G<sub>1</sub> maggiori, tutte le circonferenze hanno il centro sulla retta che unisce il punto S<sub>11</sub><sup>\*</sup> con l'origine, la circonferenza a G<sub>1</sub> nullo ha centro nell'origine e raggio unitario, quella a G<sub>1</sub> unitario passa per l'origine ed infine quella di raggio nullo (r=0) ha centro in  $\Gamma_S = S_{11}^*$  e corrisponde al massimo valore di G<sub>1</sub>.



Fig. 11.10

Un discorso analogo può essere ripetuto per il guadagno  $G_2$  in funzione di  $\Gamma_L$ . Infine si vuole notare che, oltre ai cerchi a  $G_1$  e  $G_2$  costante, con una procedura analoga, possono essere definiti i cerchi a guadagno di potenza e guadagno disponibile costante rispettivamente nei piani  $\Gamma_L$  e  $\Gamma_S$ .

Come detto in precedenza il progetto di un amplificatore può essere indirizzato all'ottenimento del massimo guadagno. Ipotizzando un comportamento unilatero le reti di adattamento devono essere progettate per avere  $\Gamma_S = S_{11}^* e \Gamma_L = S_{22}^*$ . In queste condizioni, tutta la potenza disponibile del generatore entra nella rete due porte mentre tutta la potenza disponibile all'uscita della rete due porte viene ceduta al carico. Sul diagramma di Smith il MUG si ottiene sui cerchi di centro w<sub>0</sub> = S<sub>11</sub>\* e w<sub>0</sub> = S<sub>22</sub>\* e raggio r=0.

#### 11.4.b Guadagno massimo per un transistor non unilatero

Nel caso in cui il transistor non possa essere considerato unilatero la situazione per il massimo trasferimento di potenza verso il transistor e verso il carico è data da:  $\Gamma_{IN} = \Gamma_{S}^{*}$  e  $\Gamma_{OUT} = \Gamma_{L}^{*}$  (adattamento coniugato).

Con riferimento all'ingresso la (11.1) con l'ipotesi  $\Gamma_{IN} = {\Gamma_S}^*$  diventa:

$$\Gamma_{\rm S} = {\rm S}_{11}^* + \frac{{\rm S}_{12}^* {\rm S}_{21}^* \Gamma_{\rm L}^*}{1 - {\rm S}_{22}^* \Gamma_{\rm L}^*} \tag{11.55}$$

La (11.2) con l'ipotesi  $\Gamma_{OUT} = {\Gamma_L}^*$  e arrangiando i termini dà :

$$\Gamma_{\rm L}^* = \frac{{\rm S}_{22} - \Delta \Gamma_{\rm S}}{1 - {\rm S}_{11} \Gamma_{\rm S}} \tag{11.56}$$

Inserendo la (11.56) nella (11.55) si ottiene:

$$\Gamma_{\rm S} = {\rm S}_{11}^{*} + \frac{{\rm S}_{12}^{*} {\rm S}_{21}^{*} ({\rm S}_{22} - \Delta \Gamma_{\rm S})}{1 - {\rm S}_{11} \Gamma_{\rm S} - \left| {\rm S}_{22} \right|^{2} + {\rm S}_{22}^{*} \Delta \Gamma_{\rm S}}$$
(11.57)

Espandendo la (11.57) si arriva ad un'espressione del secondo ordine in  $\Gamma_{\text{S}}\text{:}$ 

$$\left( S_{11} - \Delta S_{22}^{*} \right) \Gamma_{S}^{2} + \left( \Delta \right|^{2} - \left| S_{11} \right|^{2} + \left| S_{22} \right|^{2} - 1 \right) \Gamma_{S} + \left( S_{11}^{*} - S_{11}^{*} \left| S_{22} \right|^{2} + S_{12}^{*} S_{21}^{*} S_{22} \right) = 0$$
(11.58)

ponendo:

$$C_{1}^{*} = S_{11}^{*} - S_{11}^{*} |S_{22}|^{2} + S_{12}^{*} S_{21}^{*} S_{22} = S_{11}^{*} - \Delta^{*} S_{22}$$
(11.59)

$$B_{1} = 1 + |S_{11}|^{2} - |S_{22}|^{2} - |\Delta|^{2}$$
(11.60)

si ha:

$$C_{1}\Gamma_{S}^{2} - B_{1}\Gamma_{S} + C_{1}^{*} = 0$$
 (11.61)

la soluzione della (11.61) è data da:

$$\Gamma_{\rm S} = \frac{{\sf B}_1 \pm \left( {\sf B}_1^2 - 4 \big| {\sf C}_1 \big|^2 \right)^{1/2}}{2{\sf C}_1} \tag{11.62}$$

Dualmente, partendo dalla (11.2) si ottiene:

$$\Gamma_{\rm L} = \frac{{\sf B}_2 \pm \left(\!{\sf B}_2^2 - 4 \big| {\sf C}_2 \big|^2\right)^{1/2}}{2{\sf C}_2} \tag{11.63}$$

dove:

$$B_{2} = 1 + |S_{22}|^{2} - |S_{11}|^{2} - |\Delta|^{2}$$
(11.64)

e:

$$C_2 = S_{22} - \Delta S_{11}^* \tag{11.65}$$

Se il transistor è unilatero la condizione per il massimo trasferimento di potenza ( $\Gamma_{IN} = \Gamma_S^* e \Gamma_{OUT} = \Gamma_L^*$ ) diventa semplicemente  $\Gamma_S = S_{11}^* e$ 

 $\Gamma_{L} = S_{22}^{*}$ , se il transistor non è unilatero il problema presenta due soluzioni per  $\Gamma_{S}$  e due per  $\Gamma_{L}$ .

Sviluppando il termine sotto radice nella (11.62) si ottiene:

$$B_{1}^{2} - 4|C_{1}|^{2} = (1 + |\Delta|^{2} - |S_{11}|^{2} - |S_{22}|^{2})^{2} - 4|S_{12}|^{2}|S_{21}|^{2}$$
(11.66)

La (11.66) può essere scritta come:

$$|B_1^2 - 4|C_1|^2 = 4(K^2 - 1) |S_{12}S_{21}|^2$$
 (11.67)

dove il fattore di stabilità K (reale) è definito come in (11.16).

Poiché la (11.66) non cambia invertendo i pedici 1 e 2 si ha anche:

$$B_1^2 - 4|C_1|^2 = B_2^2 - 4|C_2|^2$$
 (11.68)

Dall'analisi svolta si deduce che se risulta:

K > 1 (11.69)

la (11.62) ammette le due soluzioni:

$$\Gamma_{\rm S}' = \frac{{\sf B}_1 - \left({\sf B}_1^2 - 4{|\sf C}_1|^2\right)^{1/2}}{2{\sf C}_1} \tag{11.70}$$

$$\Gamma_{\rm S}'' = \frac{{\sf B}_1 + \left(\!{\sf B}_1^2 - 4 \big|{\sf C}_1\big|^2\right)^{\!1/2}}{2{\sf C}_1} \tag{11.71}$$

Si noti che nelle (11.70)-(11.71) essendo K > 1 il termine sotto radice risulta reale e positivo, in base alla (11.60) anche  $B_1$  è reale mentre  $C_1$  sarà in generale complesso. Dalle (11.70)-(11.71) si ottiene:

$$\left|\Gamma_{\rm S}' \, \Gamma_{\rm S}''\right| = 1 \tag{11.72}$$

dualmente a partire dalla (11.63) si possono ricavare le due soluzioni per il coefficiente di uscita ( $\Gamma'_{L} e \Gamma''_{L}$ ):

$$\Gamma_{\rm L}' = \frac{{\sf B}_2 - \left(\!{\sf B}_2^2 - 4 \big|{\sf C}_2\big|^2\right)^{1/2}}{2{\sf C}_2} \tag{11.73}$$

$$\Gamma_{\rm L}'' = \frac{{\sf B}_2 + \left({\sf B}_2^2 - 4 |{\sf C}_2|^2\right)^{1/2}}{2{\sf C}_2} \tag{11.74}$$

dalle quali si ottiene:

$$\left|\Gamma_{L}^{\prime} \Gamma_{L}^{\prime\prime}\right| = 1 \tag{11.75}$$

quindi esiste sicuramente una soluzione con  $|\Gamma_{S}| < 1 e |\Gamma_{L}| < 1$ .

In particolare, se risulta  $B_1 > 0$  e  $B_2 > 0$  e quindi si ha anche  $|\Delta| < 1$ , la soluzione  $\Gamma'_S$ ,  $\Gamma'_L$  verifica la condizione:  $|\Gamma'_S| < 1$  e  $|\Gamma'_L| < 1$ . In questo caso il transistor è come detto incondizionatamente stabile.

Se invece risulta  $B_1 < 0$  e  $B_2 < 0$  quindi  $|\Delta| > 1$  sarà la soluzione  $\Gamma''_S$ ,  $\Gamma''_L$  a verificare la:  $|\Gamma''_S| < 1$  e  $|\Gamma''_L| < 1$  e l'amplificatore è condizionatamente stabile.

Come detto in precedenza in questo caso alcuni valori di  $\Gamma_{S} \in \Gamma_{L}$  (ma non  $\Gamma''_{S} \in \Gamma''_{L}$ ) possono dar luogo ad instabilità.

In conclusione, se risulta K > 1, è possibile scegliere i valori di  $\Gamma_S \in \Gamma_L$  che permettono di ottenere il guadagno massimo, cioè  $\Gamma_{IN} = \Gamma_S^* \in \Gamma_{OUT} = \Gamma_L^*$ .

Si dimostra che in questo caso il guadagno di trasduzione vale (\*):

$$G_{\text{TMAX}} = \frac{|S_{21}|}{|S_{12}|} \left| K \pm (K^2 - 1)^{1/2} \right|$$
(11.76)

Il segno + vale nel caso  $|\Delta| > 1$  ed il segno - nel caso  $|\Delta| < 1$ . Valutando l'andamento del guadagno in funzione del coefficiente di riflessione si vede che nel caso  $|\Delta| < 1$  (segno -) quello ottenuto è effettivamente il guadagno massimo; mentre nel caso  $|\Delta| > 1$  (segno +) quello che si ottiene è un minimo nel guadagno <sup>(\*)</sup>.

Se risulta:

ne segue:

$$B_1^2 - 4|C_1|^2 < 0 \tag{11.78}$$

$$B_2^2 - 4 |C_2|^2 < 0 \tag{11.79}$$

e quindi dalle (11.70-11.71) e (11.73-11.74) discende:

$$|\Gamma'_{S}| = |\Gamma''_{S}| = |\Gamma'_{L}| = |\Gamma''_{L}| = 1$$
(11.80)

L'adattamento coniugato non è ottenibile ed il transistor è, anche in questo caso, condizionatamente stabile.

<sup>(\*)</sup> C. Gentili, Microwave amplifier and oscillator, North Oxford Academic, 1986.

In questo caso esistono dei valori di  $\Gamma_{S} \in \Gamma_{L}$  (ma non  $\Gamma'_{S} \in \Gamma'_{L} \circ \Gamma''_{S} \in \Gamma''_{L}$ ) che danno luogo a stabilità.

Infine se risulta:

si può dimostrare che in questo caso si hanno necessariamente una coppia di radici con modulo maggiore dell'unità e quindi la condizione per il massimo guadagno di trasduzione non può essere ottenuta ed inoltre il transistor è intrinsecamente instabile e quindi non può essere utilizzato come amplificatore.

Tutto quello detto in precedenza vale ad una prefissata frequenza, in certe applicazioni si vuole avere il massimo guadagno possibile su di una banda di frequenze. Poiché in generale il guadagno diminuisce al crescere della frequenza il massimo guadagno possibile deve riferirsi alla frequenza più alta della banda di interesse. In questo caso le reti di adattamento in ingresso ed in uscita devono essere progettate in modo da disadattare sia l'ingresso che l'uscita (o solo una delle due) al fine di ridurre il guadagno di trasduzione alle più basse frequenze della banda di interesse.

## 11.5 Dimensionamento di amplificatori per piccoli segnali

Il progetto di un amplificatore a microonde segue diversi passi che sono anche tipici di un qualsiasi progetto a microonde (es. filtri, oscillatori etc.). Si parte dalle "specifiche di progetto" che sono fornite dal committente. Il primo passo del progetto consiste nella scelta di una certa "topologia circuitale" adatta a meglio soddisfare le specifiche (adattamento reattivo, struttura bilanciata, controreazione, etc.). L'esperienza del progettista, ovvero un'analisi dei componenti disponibili sul mercato lo porterà a scegliere un dato "transistor". A questo punto si procede con il "dimensionamento" dell'amplificatore. In questa fase, lavorando con la carta di Smith o con programmi ad hoc il progettista dimensiona il circuito che viene verificato con il CAD. Il progetto prosegue con la realizzazione del "layout" e l'"ottimizzazione" finale per rimuovere l'effetto dei parassiti. Se il progetto rispetta le specifiche si può passare prima alla produzione del "prototipo" sul quale effettuare le prime misure di verifica, ed infine alla produzione su "scala".

In questo paragrafo sono indicati alcuni criteri per il dimensionamento di amplificatori di segnale. In particolare si farà riferimento al progetto di amplificatori a partire da transistor incondizionatamente stabili, condizionatamente stabili.

11.5.a Amplificatore per il massimo guadagno a partire da un transistor incondizionatamente stabile

Come esempio per questa classe di amplificatori si è considerato un progetto intorno alla frequenza di 15 GHz a partire dal transistor NEC 71083. I parametri di scattering per questo transistor, valutati per V<sub>DS</sub> =  $3V e I_{DS} = 10mA$  sono riportati di seguito in modulo e fase.

S11(.567, 128) S21 (1.467, -45) S12 (.101, -33) S22 (.609, -169)

Preliminarmente si verifica la stabilità del transistor alla frequenza di interesse. Utilizzando i parametri di scattering a 15 GHz e le Eq. (11.7) e (11.16) si ottiene:

quindi il transistor è incondizionatamente stabile e si ha in base alla (11.76):

$$G_{TMAX} = 9.676 \text{ dB}$$
 (11.83)

Se avessimo considerato il transistor unilatero si aveva, in base alla (11.47):

$$MUG = 7.026 \quad dB$$
 (11.84)

Quindi i due guadagni differiscono di 1.65 dB. Questo risultato ci dice che l'analisi semplificata, che può essere fatta considerando il transistor unilatero, fornisce dei risultati diversi da quelli reali. Tuttavia se sono richiesti dei valori molto precisi l'ipotesi di transistor unilatero va rimossa.

I coefficienti di riflessione che permettono di ottenere il  $G_{TMAX}$  sono ricavabili in base alle (11.70)-(11.73) e si ottiene:

$$\Gamma'_{\rm S}$$
 = -0.399 – j 0.670  
(11.85)  
 $\Gamma'_{\rm L}$  = -0.797 + j 0.069

II MUG invece si ottiene semplicemente ponendo  $\Gamma'_{S} = S_{11}^{*} e \Gamma'_{L} = S_{22}^{*}$  per cui si ha:

$$\Gamma'_{\rm S}$$
 = -0.349 –j 0.446 (11.86)  
 $\Gamma'_{\rm L}$  = - 0.597 + j 0.116

Il progetto delle reti di adattamento in ingresso ed in uscita (Fig. 11.8), che consentono di ottenere i citati valori dei coefficienti di riflessione, può essere condotto direttamente sulla carta di Smith.

Con riferimento all'ingresso si può considerare una rete di adattamento reattiva del tipo di quella riportata in Fig. 11.11.

Questa rete può essere dimensionata muovendosi sulla carta di Smith a partire dal punto  $R_G$ =50  $\Omega$  fino ad arrivare, per effetto dello stub in parallelo (I<sub>2</sub>) e del tratto di linea (I<sub>1</sub>), nel punto  $\Gamma'_{S}$ .



Fig. 11.11



Fig. 11.12

Una procedura alternativa si basa sulla seguente osservazione: preso il coniugato del coefficiente di riflessione da sintetizzare ( $\Gamma_{s}^{\prime*}$ ), la rete (reattiva e priva di perdite) che trasforma questo carico in 50  $\Omega$  (Fig. 11.12b), è la stessa che trasforma i 50  $\Omega$  in  $\Gamma'_{s}$  (Fig. 11.12a)<sup>(\*)</sup>. Il secondo problema (Fig. 11.12b) è un classico problema di adattamento che può essere risolto con le tecniche descritte in precedenza.

Con riferimento a questa seconda procedura si vuole progettare la rete di adattamento che, nell'ipotesi di transistor non unilatero, fornisca il G<sub>TMAX</sub>. Alla frequenza di 15 GHz si ha:  $\Gamma_{\rm S}(z) = -0.399 - j 0.670$  (punto A sulla carta di Smith delle impedenze di Fig. 11.13). e quindi  $\Gamma_{\rm S}^{\prime*}(z) = -0.399 + j 0.670$  (punto B).

 $^{(*)}$  per la rete di Fig. 11.12.a risulta  $~\Gamma_{S}'~=S_{_{22}}$  . Per quello di Fig. 11.11.b risulta invece:

 $\Gamma_{\rm IN} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_{\rm S}^{*}}{1 - S_{22}\Gamma_{\rm S}^{*}}.$  Se la rete è reciproca e priva di perdite si ha:  $S_{II}S_{I2}^{*} + S_{2I}S_{22}^{*} = 0$  e  $|S_{2I}|^{2} + |S_{22}|^{2} = I$  da cui risulta  $\Gamma_{IN} = 0$ 



Fig. 11.13

Passando alla carta di Smith delle ammettenze si ottiene il punto C ( $\Gamma_{S}^{\prime*}(y)$ ). La procedura sopra esposta richiede ora di trasformare  $\Gamma_{S}^{\prime*}(y)$  in 50  $\Omega$ . Quindi, a partire dal punto C ci si muove su di una circonferenza percorsa in senso orario per un angolo  $\theta_1=2\beta I_1\approx 270^\circ$  fino a raggiungere il punto 1+jB' (punto D). In questo modo si può progettare la lunghezza del tratto  $I_1$  essendo  $\beta I_1\approx 135^\circ$ . A questo punto si somma una suscettanza B tale che:  $Y_{IN}$  = 1 +jB' -jB = 1. Questa seconda suscettanza può essere realizzata ad esempio con uno stub in corto circuito. Questo stub si può progettare muovendosi sulla circonferenza unitaria a partire dal corto (punto E) fino a raggiungere il valore di suscettanza desiderato (punto F) in questo caso si descrive un angolo  $\theta_2=2\beta I_2\approx 60^\circ$  per cui risulta  $\beta I_2\approx 30^\circ$ . Un discorso analogo può essere ripetuto per la rete di adattamento in uscita ottenendo:  $\beta I_3\approx 20^\circ$  e  $\beta I_4\approx 150^\circ$ .

Il progetto della rete di adattamento può essere condotto anche utilizzando delle reti reattive composte da induttanze e capacità. Supponendo di voler adattare lo stesso carico  $\Gamma_{\rm S}^{\prime*}(z)$  visto in precedenza (punto B in Fig. 11.14) a questo carico è associato un certo valore  $\hat{\rm R}_{\rm B}$  e  $\hat{\rm X}_{\rm B}$ ; per arrivare sulla circonferenza  $\hat{G}=1$  devo aggiungere una capacità in serie a questo carico, in questo modo mi muovo sulla circonferenza a  $\hat{\rm R}_{\rm B}$  costante. Il valore di capacità dovrà essere progettato per portare il carico in D sulla circonferenza  $\hat{G}=1$  e quindi è ricavabile dall'equazione:  $\hat{X}_D 50 = \hat{X}_B 50 - 1/\omega C_S$ . A questo punto posso leggere il valore di  $\hat{\rm B}$  in D (- $\hat{\rm B}_{\rm D}$ ) e dovrò aggiungere una suscettanza  $\hat{\rm B}_{\rm D}$  per spostare il carico nell'origine e quindi ottenere l'adattamento. Questo può essere ottenuto aggiungendo una capacità in parallelo il cui valore è dato dall'equazione  $\hat{B}_D / 50 + \omega C_P = 0$ .



a)

Fig. 11.14

Quindi, in questa situazione, si ottiene una rete formata da due capacità. Si noti che si poteva adattare anche con una rete formata da una capacità in parallelo seguita da una serie. In questo caso ci si portava prima sulla circonferenza ad  $\hat{R} = 1$  (punto E) e poi sull'origine. Se il carico da adattare era posto in un altro punto della carta di Smith si potevano avere circuiti L-C o L-L.

# 11.5.b Amplificatore a banda frazionale stretta a partire da un transistor condizionatamente stabile

Come esempio per questa classe di amplificatori riportiamo un progetto alla frequenza di 10 GHz condotto a partire dal transistor NEC 32400. Per questo transistor polarizzato con  $V_{DS}$  = 1.6 V e  $I_{DS}$  = 17 mA, ( $V_{GS}$  = - 0.2 V) alla frequenza di 10 GHz risulta K = 0.3.

In questa situazione si possono scegliere due strategie:

- Si possono aggiungere delle reti di controreazione reattive o resistive al fine di ottenere un dispositivo complessivamente incondizionatamente stabile.
- b) Si può mantenere il transistor condizionatamente stabile e lavorare nella regione stabile.

Con riferimento al punto a, una rete di controreazione che si può utilizzare per ottenere un dispositivo incondizionatamente instabile ( K > 1 e  $|\Delta| < 1$ ) è costituita da un'induttanza in serie al source del transistor.

Per il dimensionamento dell'induttanza serie è utile valutare i parametri di scattering del transistor con l'induttanza in serie (Fig. 11.15 - reazione serie induttiva).



Fig. 11.15

Dalla matrice di scattering del dispositivo non reazionato si può calcolare la matrice delle impedenze con la relazione:

$$[Z_T] = Z_0 ([I] + [S_T]) ([I] - [S_T])^{-1}$$
(11.87)

La matrice [Z] dell'induttanza  $L_S$  è costituita da tutti elementi uguali e pari all'impedenza dell'induttanza:

$$\begin{bmatrix} Z_{LS} \end{bmatrix} = j\omega L_{S} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
(11.88)

Il collegamento tra il transistor e l'induttanza è del tipo serie-serie, quindi la matrice impedenze del transistor reazionato è la somma delle matrici impedenze del transistor e dell'induttanza:

$$[Z_{TOT}] = [Z_T] + [Z_{LS}]$$
(11.89)

Dalla  $[Z_{TOT}]$  si può calcolare la matrice di scattering del transistor reazionato:

$$[S_{TOT}] = ([Z_{TOT}] + Z_0[I])^{-1} ([Z_{TOT}] - Z_0[I])$$
(11.90)

Un approccio alternativo per calcolare i parametri di scattering del FET controreazionato si basa sull'uso dei parametri di scattering del transistor visto come rete a 3 porte e verrà descritto nel capitolo 11. In conclusione, conoscendo i parametri di scattering si possono graficare le grandezze di interesse per valutare l'effetto della reazione: in Fig. 11.16 è tracciato il K al variare dell'induttanza di reazione



Fig 11.16

Come si vede una modesta reazione induttiva rende il FET incondizionatamente stabile, valori più grandi di induttanza, invece, lo lasciano nella condizione di stabilità condizionata ma si ottengono, in ogni caso, dei valori di K più grandi. Con altri dispositivi si potevano ottenere risultati diversi ma l'andamento generale è simile a quello mostrato in Fig. 11.16. Si vuole infine osservare che il miglioramento di K e guindi della stabilità avviene a scapito del guadagno che diminuisce al crescere di L<sub>s</sub>.

Si noti che, in fase di progetto, un criterio di massima per poter considerare il transistor incondizionatamente stabile è quello di avere K > 1.2. Si devono scegliere per K dei valori molto più grandi di 1 per compensare le variazioni dei parametri di scattering e delle reti di adattamento.

Come detto in precedenza, sempre con riferimento al punto a, un'ulteriore strategia per rendere il transistor incondizionatamente stabile consiste nell'aggiungere una rete resistiva in uscita o in ingresso al transistor. La presenza di resistenze nelle reti di adattamento genera un'attenuazione per dissipazione che aumenta il K ma diminuisce nello stesso tempo il guadagno. Le resistenze possono essere considerate come facenti parte del transistor analogamente a quanto fatto per la reazione induttiva, e se ne può valutare l'effetto valutando il parametro K a varie frequenze in funzione del valore della resistenza applicata. A questo fine è preferibile utilizzare le matrici di trasferimento [T] del transistor singolo e della resistenza (serie o parallelo), per calcolare la matrice [T] globale e risalire ai parametri di scattering del transistor caricato.



Fig 11.17

Con riferimento allo schema di Fig. 11.17 La matrice T del transistor è:

$$[T] = \begin{bmatrix} (1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21} & (1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21} \\ (1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21} & (1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21} \end{bmatrix} / 2S_{21}$$
(11.91)

Per le resistenze si ha:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{T} \end{bmatrix}_{\mathsf{S}} = \begin{bmatrix} \mathsf{1} & \mathsf{R}_{\mathsf{S}} \\ \mathsf{0} & \mathsf{1} \end{bmatrix}$$
(11.92)

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/ & 1 \\ /R_{p} & 1 \end{bmatrix}$$
(11.93)

La matrice  $[T]_{TOT}$  è data dal prodotto delle due in cascata ed infine la matrice S totale si calcola come:

$$[S]_{TOT} = \frac{\begin{bmatrix} A_{TOT} + B_{TOT} - C_{TOT} - D_{TOT} & 2(A_{TOT} D_{TOT} - B_{TOT} C_{TOT}) \\ 2 & -A_{TOT} + B_{TOT} - C_{TOT} + D_{TOT} \end{bmatrix}}{A_{TOT} + B_{TOT} + C_{TOT} + D_{TOT}}$$
(11.94)

Una volta calcolati i parametri di scattering del transistor caricato si può graficare il fattore K al variare della resistenza.

Ponendo una resistenza in parallelo in uscita si ottiene per il NEC32400 l'andamento riportato in Fig. 11.18. In figura sono riportate varie curve al variare della frequenza. Come si vede si ottengono dei valori di K maggiori di 1 con bassi valori di R, ma le cose peggiorano al diminuire della frequenza.



Fig 11.18

Ponendo una resistenza in serie in uscita si ottiene l'andamento riportato in Fig. 11.19. In questo caso si stabilizza il transistor con elevati valori di R ma di nuovo le cose vanno male alle basse frequenze.



Fig 11.19

I migliori risultati si ottengono con una resistenza in parallelo in ingresso. Questo caso è mostrato in Fig. 11.20. La condizione K > 1.2 si ottiene facilmente con bassi valori di R. In Fig. 11.21 è riportato l'andamento di G<sub>TMAX</sub>. Come prevedibile il G<sub>TMAX</sub> si riduce al diminuire di R. Una scelta di compromesso, in questo caso particolare, consiste nello scegliere R  $\approx$  45  $\Omega$ .



Fig 11.20



Fig 11.21

Una volta stabilizzato, il transistor può essere adattato in ingresso ed in uscita con le tecniche descritte in precedenza per transistor incondizionatamente stabili.

Come detto all'inizio del paragrafo, (punto b) per realizzare degli amplificatori stabili a partire da transistor solo "condizionatamente stabili" è anche possibile utilizzare dei carichi posti nella regione stabile.

Come visto in precedenza, con K < 1 non è possibile adattare in maniera coniugata entrambe le porte di un transistor, tuttavia, nel caso particolare 0 < K < 1 si può cercare di adattare in maniera coniugata una delle due porte<sup>(\*)</sup>. Assumendo ad esempio di adattare in ingresso si avrà G<sub>P</sub> = G<sub>T</sub>; ML<sub>IN</sub> = 1, quindi, al fine di dimensionare G<sub>T</sub> posso dimensionare G<sub>P</sub> lavorando nel piano di uscita  $\Gamma_L$ .

Poiché risulta:

$$\Gamma_{\rm IN} = \Gamma_{\rm S}^{*} = {\rm S}_{11} + \frac{{\rm S}_{12} {\rm S}_{21} \Gamma_{\rm L}}{1 - {\rm S}_{22} \Gamma_{\rm L}}$$
(11.95)

si ha:

$$\Gamma_{\rm L} \left( \Gamma_{\rm IN} = \Gamma_{\rm S}^{\star} \right) = \frac{\Gamma_{\rm S}^{\star} - {\rm S}_{11}}{\Gamma_{\rm S}^{\star} {\rm S}_{22} - \Delta}$$
(11.96)

Questa relazione può essere utilizzata per mappare la circonferenza di stabilità in ingresso nel piano di uscita ( $\Gamma_L$ ). Per un generico transistor si ottiene la situazione riportata in Fig. 11.22. Nella stessa figura è anche riportata la circonferenza di stabilità di uscita ( $|\Gamma_{IN}| = 1$  e quindi  $G_P = \infty$ ). La circonferenza di stabilità in ingresso mappata in uscita coincide con la circonferenza a guadagno in potenza costante pari a:  $G_P = MSGL = 2K \cdot MSG = 2K |S_{21}/S_{12}|^{(*)}$ ; dove MSG rappresenta il G<sub>TMAX</sub> del dispositivo attivo con K = 1 e MSGL è il massimo guadagno di trasduzione ottenibile con una rete di adattamento priva di perdite. Il cerchio unitario coincide con la circonferenza a guadagno in potenza nullo. Tutte le circonferenze citate passano per due punti in cui quindi il guadagno è indeterminato. Infatti in questi punti  $|\Gamma_L| = 1$  e quindi il numeratore di G<sub>P</sub> è uguale a zero (vedi Eq. 11.31). Questi punti si trovano anche sulla circonferenza di stabilità dove  $|\Gamma_{IN}| = 1$  e quindi anche il denominatore di G<sub>P</sub> è uquale a zero per cui G<sub>P</sub> è una forma indeterminata. Calcolando il limite si trovano valori diversi a seconda della direzione da cui il limite stesso viene effettuato. In conclusione un dato  $G_T \leq MSGL$  può essere ottenuto scegliendo un carico nella regione tratteggiata di Fig. 11.22. A partire da questo carico posso calcolare  $\Gamma_{IN}$  e devo poi progettare  $\Gamma_{S} = \Gamma^{*}_{IN}$ .

<sup>(\*)</sup> M.L. Edwards, S. Cheng, J.H. Sinsky, A deterministic approach for designing conditionally stable amplifiers, IEEE Trans. on MTT, Jul.95, pp. 1567-1575.



Fig. 11.22

Il dimensionamento sopra effettuato consente di ottenere un perfetto adattamento in ingresso, tuttavia in molti casi è anche importante vedere cosa succede alla porta non adattata (in questo caso quella di uscita). Se ci si posiziona in un punto per il quale risulta G<sub>P</sub> = MSGL si ha G<sub>D</sub> =  $\infty$  e ML<sub>OUT</sub> =  $\infty$ , anche in G<sub>P</sub> = G<sub>T</sub> = 0 trovo ML<sub>OUT</sub> =  $\infty$  questo significa che muovendo il carico, all'interno della zona tratteggiata, ci sarà un punto di minimo per ML<sub>OUT</sub>. Questo punto di minimo può essere trovato in forma chiusa. In <sup>(\*\*)</sup> è stato dimostrato che si ha:

$$ML_{OUTMIN} = \frac{1}{K^2}$$
(11.97)

e che in questa situazione risulta:

$$G_{\text{TOPT}} = K \left| \frac{S_{21}}{S_{12}} \right| = K \cdot \text{MSG} = \frac{\text{MSGL}}{2}$$
(11.98)

Quindi se si sceglie un carico  $\Gamma_L$  sulla circonferenza di uscita  $G_P = G_{TOPT} e$  poi si realizza  $\Gamma_S = \Gamma^*_{IN}$  si ha  $ML_{OUT} = ML_{OUTMIN}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>(\*\*)</sup> D. Benvenuti, M. Cicolani, S. Pisa, and A. Trifiletti, LNA Design by Parallel FETs, Microwave and Optical Technology Letters, February 2002, pp. 280-284.

## 11.6 Fattore di rumore

La potenza di rumore (N<sub>o</sub>) totale all'uscita di un amplificatore a microonde è data dalla potenza del rumore prodotto dai dispositivi attivi e passivi che compongono l'amplificatore (N) e dalla potenza di rumore che entra nella porta di ingresso (N<sub>i</sub>) e viene amplificata. Le cause di rumore nei dispositivi attivi sono le stesse esaminate in precedenza mentre il rumore che entra dalla porta di ingresso è essenzialmente quello dovuto alla resistenza del generatore.

Il modello di un amplificatore a microonde rumoroso è quindi il seguente:



Fig. 11.23

In Fig. 11.23 l'impedenza interna del generatore ( $Z_G = 50 \Omega$ ) è supposta non rumorosa ed il rumore è rappresentato tramite il generatore v<sub>ng</sub>.

La potenza del rumore in uscita sul carico ( $Z_c = 50 \Omega$ ) è data da:

$$N_{\rm O} = N + G_{\rm D} N_{\rm I} \tag{11.99}$$

dove G<sub>D</sub> è il guadagno disponibile dell'amplificatore.

Il rumore in un transistor può essere descritto tramite il fattore di rumore F definito come:

$$F = \frac{S_{\rm I}/N_{\rm I}}{S_{\rm O}/N_{\rm O}}$$
(11.100)

dove:

 $S_i$  = potenza disponibile del segnale di ingresso

N<sub>I</sub> = potenza disponibile del rumore in ingresso

S<sub>o</sub> = potenza disponibile del segnale in uscita

N<sub>o</sub> = potenza disponibile del rumore in uscita

Un altro modo per descrivere il comportamento di un transistor rumoroso consiste nel considerare l'amplificatore ideale, cioè privo di rumore, e nel trasferire il rumore prodotto al suo interno in ingresso o in uscita (Fig. 11.24). Il rumore è modellato con due generatori di rumore (correlati) che possono essere scelti coerentemente con la rappresentazione della rete: se la rete è modellata con la matrice delle impedenze i generatori sono di tensione in serie (Fig 11.24.a), per la matrice delle ammettenze sono di corrente in parallelo (Fig 11.14.b), per la matrice di trasferimento sono uno di corrente ed uno di tensione (Fig 11.214.c).



Fig. 11.24

Con questo accorgimento per ogni rappresentazione, si può definire un vettore aleatorio [n] additivo. In particolare per la matrice delle impedenze si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{1} = Z_{11} \mathbf{I}_{1} + Z_{12} \mathbf{I}_{2} + \mathbf{v}_{n1} \\ \mathbf{V}_{2} = Z_{21} \mathbf{I}_{1} + Z_{22} \mathbf{I}_{2} + \mathbf{v}_{n2} \end{cases} \qquad [\mathbf{V}] = [Z][\mathbf{I}] + [\mathbf{n}_{v}] \qquad (11.101)$$

mentre per la matrice delle ammettenze si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_{1} = \mathbf{Y}_{11} \, \mathbf{I}_{1} + \mathbf{Y}_{12} \, \mathbf{I}_{2} + \mathbf{i}_{n1} \\ \mathbf{I}_{2} = \mathbf{Y}_{21} \, \mathbf{I}_{1} + \mathbf{Y}_{22} \, \mathbf{I}_{2} + \mathbf{i}_{n2} \end{cases}$$
 [I]=[Y][V]+[n<sub>i</sub>] (11.102)

e per la matrice di trasferimento:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{1} = \mathbf{A} \, \mathbf{V}_{2} + \mathbf{B} \, \mathbf{I}_{2} + \mathbf{v}_{nT} \\ \mathbf{I}_{1} = \mathbf{C} \, \mathbf{V}_{2} + \mathbf{D} \, \mathbf{I}_{2} + \mathbf{i}_{nT} \end{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1} \\ \mathbf{I}_{1} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{2} \\ \mathbf{I}_{2} \end{bmatrix} + [n_{T}] \qquad (11.103)$$

In particolare, con riferimento alla rappresentazione con la matrice di trasferimento, si inserisce un generatore di tensione di rumore  $(v_{nT})$  in serie all'ingresso ed un generatore di corrente di rumore  $(i_{nT})$  in parallelo all'ingresso (Fig. 11.24c). In questo caso la potenza disponibile di rumore in uscita può essere espressa come:

$$N_{\rm O} = (N_{\rm T} + N_{\rm I}) G_{\rm D}$$
 (11.104)

dove  $N_T$  è la potenza di rumore dell'amplificatore ricondotta in ingresso ed  $N_I$  quella dovuta al generatore. In questo caso la (11.100) diventa:

$$F = \frac{S_{I} / N_{I}}{S_{I}G_{D} / (N_{T} + N_{I})G_{D}} = 1 + \frac{N_{T}}{N_{I}}$$
(11.105)

Osservando che la potenza disponibile del rumore termico è data da:

$$N = \frac{1}{4} \frac{\langle v^2 \rangle}{R} = kTB$$
(11.106)

La (11.104) può essere riscritta come:

$$N_{O} = G_{D}k(T_{T} + T_{I})B$$
 (11.107)

in cui T<sub>1</sub> è la temperatura ambiente (T<sub>1</sub>  $\approx$  290 K), e T<sub>T</sub> rappresenta la temperatura di rumore equivalente dell'amplificatore supposto non rumoroso. Considerando la (11.107), il fattore di rumore F diviene:

$$\mathsf{F} = 1 + \frac{\mathsf{T}_{\mathsf{T}}}{\mathsf{T}_{\mathsf{I}}} \tag{11.108}$$

Il fattore di rumore F viene generalmente espresso in decibel e, in tali condizioni, prende il nome di figura di rumore NF:

NF = 
$$10 \log(F) = 10 \log\left(1 + \frac{T_T}{T_I}\right)$$
 (11.109)

Se si considera un amplificatore formato da 2 stadi in cascata aventi guadagni disponibili  $G_1$ ,  $G_2$  e fattori di rumore  $F_1$ ,  $F_2$  il fattore di rumore totale diviene:

$$F = \frac{S_1 / N_1}{S_3 / N_3} = \frac{N_3}{N_1} \frac{1}{G_1 G_2} = \frac{\left[ (N_{T1} + N_1)G_1 + N_{T2} \right]G_2}{N_1 G_1 G_2} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}$$
(11.110)

La (11. 110) generalizzata al caso di N amplificatori diventa:

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \frac{F_4 - 1}{G_1 G_2 G_3} + \dots + \frac{F_N - 1}{G_1 G_2 G_3 \dots G_{N-1}} (11.111)$$

#### 11.6.a Figura di rumore minima

Utilizzando lo schema di Fig. 11.24.c il fattore di rumore del transistor può essere espresso in funzione dei parametri del transistor e delle impedenze del generatore e del carico <sup>(\*)</sup>.

In particolare, il rumore associato al generatore di ingresso ha una tensione quadratica media data da:

$$\left< v_{ng}^2 \right> = 4kTR_GB$$
 (11.112)

Analogamente è possibile esprimere la tensione e la corrente quadratica media dei generatori  $v_{nT}$  ed  $i_{nT}$  come:

$$\left< v_{nT}^2 \right> = 4kTR_SB$$
(11.113)
 $\left< \dot{i}_{nT}^2 \right> = 4kTG_PB$ 

dove  $R_S$  rappresenta la resistenza di rumore equivalente e  $G_P$  la conduttanza di rumore equivalente del transistor.

Detta  $Z_{IN}$  l'impedenza di ingresso dell'amplificatore possiamo calcolare le tensioni v'<sub>ng</sub> e v'<sub>nT</sub> in ingresso all'amplificatore indotte da v<sub>ng</sub> e v<sub>nT</sub>:

$$v'_{ng} = v_{ng} \frac{Z_{IN}}{Z_{IN} + Z_G}$$

$$v'_{nT} = v_{nT} \frac{Z_{IN}}{Z_{IN} + Z_G}$$
(11.114)

Il generatore di corrente  $i_{nT}$  dà luogo a sua volta in ingresso alla tensione

$$v''_{nT} = i_{nT} \frac{Z_{IN} Z_G}{Z_{IN} + Z_G}$$
 (11.115)

Quindi le potenze di rumore in ingresso sono date da:

<sup>(\*)</sup> Si noti che in questo caso l'impedenza  $Z_G$  è complessa in quanto tiene conto anche della rete di adattamento che sarà posta in ingresso al transistor. In pratica la  $Z_G$  di questo paragrafo coincide con la  $Z_S$  di Fig. 11.8.

$$N_{I} = Re \left\{ \frac{\left\langle v_{ng}^{\prime 2} \right\rangle}{Z_{IN}} \right\}$$
(11.116)  
$$N_{T} = Re \left\{ \frac{\left\langle \left( v_{nT}^{\prime} + v_{nT}^{\prime\prime} \right)^{2} \right\rangle}{Z_{IN}} \right\}$$

Con queste posizioni il fattore di rumore diventa:

$$\begin{split} F &= 1 + \frac{\left\langle \left(v_{nT}^{\prime} + v_{nT}^{\prime\prime}\right)^{2}\right\rangle}{\left\langle v_{ng}^{\prime2}\right\rangle} = 1 + \frac{\left\langle \left(v_{nT}^{\prime} + i_{nT}^{\prime}Z_{G}^{\prime}\right)^{2}\right\rangle}{\left\langle v_{ng}^{2}\right\rangle} \\ &= 1 + \frac{\left\langle v_{nT}^{2}\right\rangle + \left|Z_{G}^{\prime}\right|^{2}\left\langle i_{nT}^{2}\right\rangle + R_{G}^{\prime}\left\langle i_{nT}^{\prime}v_{nT}^{*} + i_{nT}^{*}v_{nT}^{\prime}\right\rangle + jX_{G}^{\prime}\left\langle i_{nT}^{\prime}v_{nT}^{*} + i_{nT}^{*}v_{nT}^{\prime}\right\rangle}{\left\langle v_{ng}^{2}\right\rangle} \end{split}$$

$$(11.117)$$

I generatori  $v_{nT}$  ed  $i_{nT}$  sono in generale correlati, cioè esiste un'impedenza di correlazione:  $Z_C = R_C + jX_C$  tale che:

$$v_{nT} = v_n + Z_C i_{nT}$$
 (11.118)

con  $v_n$  ed  $i_{nT}$  incorrelati.

Con queste posizioni si ottiene:

$$F = 1 + \frac{\left\langle v_{nT}^{2} \right\rangle + \left| Z_{G} \right|^{2} \left\langle i_{nT}^{2} \right\rangle + 2R_{G}R_{C}\left\langle \left. i_{nT}^{2} \right\rangle + 2X_{G}X_{C}\left\langle \left. i_{nT}^{2} \right\rangle }{\left\langle v_{ng}^{2} \right\rangle}$$

$$=1+\frac{4kTR_{S}B+|Z_{G}|4kTG_{P}B+2R_{G}R_{C}4kTG_{P}B+2X_{G}X_{C}4kTG_{P}B}{4kTR_{G}B}$$

$$=1+\frac{R_{S}}{R_{G}}+\frac{G_{P}(R_{G}^{2}+X_{G}^{2})}{R_{G}}+2G_{P}R_{C}+\frac{2X_{C}G_{P}X_{G}}{R_{G}}$$
(11.119)

Quindi il fattore di rumore è funzione dell'impedenza della sorgente. In particolare si può osservare (Fig. 11.24c) che, se per il transistor in esame prevale la tensione di rumore rispetto alla corrente di rumore, utilizzando una sorgente con un'elevata impedenza rispetto a quella d'ingresso del transistor, si minimizza il rumore in ingresso all'amplificatore e quindi anche quello trasmesso. Viceversa se prevale la corrente di rumore, utilizzando una sorgente con una bassa impedenza rispetto a quella d'ingresso del transistor si riduce il

rumore in uscita. In generale, l'impedenza del generatore può essere scelta in modo da minimizzare il fattore di rumore, basta imporre:

$$\frac{\partial F}{\partial X_{G}} = 0 \qquad \qquad \frac{\partial F}{\partial R_{G}} = 0 \qquad (11.120)$$

In questo modo si ottiene:

$$X_{OPT} = -X_{C}$$
 (11.121)

$$R_{OPT} = \left(\frac{R_{S}}{G_{P}} - X_{C}^{2}\right)^{1/2}$$
(11.122)

Per  $Z_G = Z_{OPT} = R_{OPT} + jX_{OPT}$  si ha F= F<sub>MIN</sub>.

Riarrangiando la (11.119) si ottiene:

$$F = F_{MIN} + \frac{R_{S}}{R_{G}} \left| \frac{Z_{G}}{Z_{OPT}} - 1 \right|^{2}$$
(11.123)

che espressa in funzione dei coefficienti di riflessione dà:

$$F = F_{MIN} + 4 \frac{R_{S}}{Z_{O}} \frac{|\Gamma_{G} - \Gamma_{OPT}|^{2}}{(1 - |\Gamma_{G}|^{2}) |1 + \Gamma_{OPT}|^{2}}$$
(11.124)

Le quantità  $F_{MIN}$  (dB),  $R_S(\Omega)$  e  $\Gamma_{OPT}$  sono note come parametri di rumore del transistor e sono fornite dal costruttore. Note queste quantità il Fattore di rumore è funzione solo dell'impedenza del generatore.

#### 11.6.b Circonferenze a figura di rumore costante

Nel progetto di amplificatori a microonde bisogna progettare delle reti di adattamento in ingresso in grado di minimizzare l'effetto del rumore prodotto in uscita. Si noti che l'impedenza di uscita non influenza la figura di rumore dell'amplificatore, ma ne influenza il guadagno di trasduzione.

Per il progetto di queste reti di adattamento è utile tracciare nel piano complesso del coefficiente di riflessione  $\Gamma_G$  delle circonferenze aventi F costante.

Con la posizione:

$$M = \frac{F - F_{MIN}}{4\hat{R}_{S}} |1 + \Gamma_{OPT}|^{2}$$
(11.125)

dove: 
$$\hat{R}_{S} = \frac{R_{S}}{Z_{O}}$$
, la (11.123) diventa:

$$M (1 - |\Gamma_{G}|^{2}) = |\Gamma_{G} - \Gamma_{OPT}|^{2}$$
 (11.126)

A partire da questa relazione e procedendo come fatto nel caso dei cerchi a guadagno costante si trovano delle circonferenze con centro e raggio dati da:

$$w_{M} = \frac{\Gamma_{OPT}}{1 + M}$$
(11.127)  
$$r_{N} = \frac{\left\{ M^{2} + M \left( 1 - \left| \Gamma_{OPT} \right|^{2} \right) \right\}^{1/2}}{1 + M}$$

Si noti che per M=0 cioè F =  $F_{MIN}$  si ottiene una circonferenza di raggio nullo e centro in  $\Gamma_{OPT}$ .

In Fig. 11.25 sono riportate alcune circonferenze a figura di rumore costante per un assegnato transistor ad una fissata frequenza.

Si noti che i raggi ed i centri di queste circonferenze cambiano al variare della frequenza in quanto i parametri di rumore variano con la frequenza.



Fig. 11.25

## 11.7 Amplificatori a basso fattore di rumore

Come detto in precedenza, in questi esempi si considerano progetti con configurazioni a singolo stadio. In questa condizione è possibile trovare un compromesso tra il guadagno e la figura di rumore (non si riesce invece ad ottenere in generale anche un buon adattamento per la qualcosa si deve ricorrere ad un amplificatore a più stadi).

Il progetto di un amplificatore a basso rumore, a partire da un transistor incondizionatamente stabile, può essere condotto in due modi:

a) Si può progettare la rete in ingresso per avere minima figura di rumore e quindi:

$$\Gamma_{\rm S} = \Gamma_{\rm OPT} \tag{11.128}$$

e la rete di uscita per l'adattamento coniugato in uscita:

$$\Gamma_{\rm L} = \Gamma_{\rm OUT}^{*} = \left(S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_{\rm OPT}}{1 - S_{11}\Gamma_{\rm OPT}}\right)^{*}$$
(11.129)

Quindi la rete di uscita sarà quella che trasforma  $\Gamma_L^*$  in 50  $\Omega$ .

b) Si può progettare la rete in ingresso per avere minima figura di rumore e quindi:

$$\Gamma_{\rm S} = \Gamma_{\rm OPT} \tag{11.130}$$

e la rete di uscita per l'adattamento coniugato in ingresso ovvero:

$$\Gamma_{\rm IN} = \Gamma_{\rm OPT}^{*} = \left( S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_{\rm L}}{1 - S_{22}\Gamma_{\rm L}} \right)^{*}$$
(11.131)

da cui si ottiene:

$$\Gamma_{\rm L} = \frac{{\sf S}_{11} - \Gamma_{\rm OPT}^{*}}{\Delta - {\sf S}_{22} \Gamma_{\rm OPT}^{*}}$$
(11.132)

In conclusione, utilizzando una configurazione a singolo stadio, è possibile garantire  $F = F_{MIN}$  ma si ha adattamento coniugato solo ad una porta. Si può cercare una situazione di compromesso migliorando l'adattamento in ingresso ed in uscita ma questo avverrà, inevitabilmente, a spese di un peggioramento nella figura di rumore.

In tutti i casi citati, per ottenere una bassa figura di rumore con elevati guadagni può essere utile aggiungere un'induttanza in serie al source. L'effetto di questa induttanza è quello di spostare il coefficiente di riflessione ottimo per il rumore  $\Gamma_{\text{OPT}}$  verso quello ottimo per il guadagno ( $\Gamma'_{\text{S}}$  per un transistor

incondizionatamente stabile) e quindi si può migliorare il compromesso figura di rumore guadagno.

Per dimensionare l'induttanza si devono calcolare i parametri di rumore del transistor controreazionato. A questo scopo si possono utilizzare le matrici di correlazione<sup>(\*)</sup>. Ad esempio per la rappresentazione tramite la matrice di trasferimento (generatori di rumore in ingresso) la matrice di correlazione è data da:

$$\begin{bmatrix} C_T \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} n_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_T^{**} \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} v_{nT} \\ i_{nT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{nT}^{**} & i_{nT}^{**} \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \left\langle v_{nT} v_{nT}^{**} \right\rangle & \left\langle v_{nT} i_{nT}^{**} \right\rangle \\ \left\langle i_{nT} v_{nT}^{**} \right\rangle & \left\langle i_{nT} i_{nT}^{**} \right\rangle \end{bmatrix} (10.133)$$

con n<sub>T</sub> vettore di rumore. Con le definizioni riportate in precedenza si ottiene:

$$\begin{bmatrix} C_{T} \end{bmatrix} = 4kT \begin{bmatrix} R_{S} & \frac{F_{MIN} - 1}{2} - R_{S} Y_{OPT}^{*} \\ \frac{F_{MIN} - 1}{2} - R_{S} Y_{OPT} & R_{S} |Y_{OPT}|^{2} \end{bmatrix} (11.134)$$

Occorre ora conoscere il legame tra la matrice di correlazione di una rete assegnata (ad esempio matrice [T]) e la matrice di correlazione della stessa rete con un'altra rappresentazione. In generale, tra i vettori di rumore di due qualsiasi rappresentazioni esiste la relazione

$$[n_{\beta}] = [T_{\alpha\beta}][n_{\alpha}]$$
 (11.135)

con  $T_{\alpha\beta}$  riportato nella Tab. 11.1.

$T_{\alpha\beta}$ $\alpha$	Y	Z	Т
β			
Y	Ι	Y	-Y <sub>11</sub> 1 -Y <sub>21</sub> 0
Z	Z	Ι	1 -Z <sub>11</sub> 0 -Z <sub>21</sub>
т	0 T <sub>12</sub> 1 T <sub>22</sub>	1 -T <sub>11</sub> 0 -T <sub>21</sub>	I

Tab. 11.1

<sup>&</sup>lt;sup>(\*)</sup> G.D. Vendelin, A.M. Pavio, U.L. Rohde, Microwave circuit design using linear and nonlinear techniques, John Wiley & Son, 1989.

Per le matrici di correlazione vale la:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{\mathsf{T}^{\star}} \end{bmatrix}$$
(11.136)

Inoltre esistono dei legami tra le matrici di correlazione di reti multiple. In particolare la matrice di correlazione  $[C_{YP}]$  di due reti collegate in parallelo è la somma delle  $[C_{Y1}]$  e  $[C_{Y2}]$  delle reti singole. Analogamente, per due reti collegate in serie, si ha che la matrice di correlazione  $[C_{ZS}]$  è la somma delle  $[C_Z]$  delle reti singole. Nel caso di reti collegate in cascata il calcolo della matrice

di correlazione è diverso e risulta:  $[C_{TC}] = [C_{T1}] + [T][C_{T2}][T^{T^*}]$ .

Utilizziamo ora quanto detto per calcolare i parametri di rumore di un transistor reazionato induttivamente.

- Si costruisce la [C<sub>T</sub>] del FET mediante la (11.134);

- Si trasforma in [C<sub>Z</sub>] con la (11.136) prendendo  $T_{\alpha\beta}$  dalla Tab. 11.1:

-

$$\begin{bmatrix} C_{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_{11} \\ 0 & -Z_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Z_{11}^{*} & -Z_{21}^{*} \end{bmatrix}$$
(11.137)

(dove i parametri Z<sub>ij</sub> sono quelli del FET non reazionato)

- Si ritrasforma in  $[C_{Ttot}]$  (la  $[C_{ZL}]$  dell'induttanza è nulla):

$$\begin{bmatrix} C_{\text{Ttot}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -T_{11\text{tot}} \\ 0 & -T_{21\text{tot}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T_{11\text{tot}}^{*} & -T_{21\text{tot}}^{*} \end{bmatrix}$$
(11.138)

(dove i parametri  $T_{ijtot}$  sono della rete globale). Dalla  $[C_{Ttot}]$  si estraggono i parametri di rumore cercati.

implementando il procedimento descritto, è possibile valutare l'effetto della reazione induttiva sul rumore in un amplificatore.

Nella figura 11.26 è graficato l'andamento di  $F_{MIN}$  al variare di L<sub>S</sub> per un particolare transistor. In generale la figura di rumore diminuisce rispetto a quella del transistor non reazionato.

Nel progetto di amplificatori a basso rumore è anche utile valutare l'adattamento in ingresso ML<sub>IN</sub> quando F =  $F_{MIN}$  ( $\Gamma_S = \Gamma_{OPT}^*$ )(con l'uscita adattata ( $\Gamma_L = \Gamma_{OUT}^*$ ). Un possibile andamento di ML<sub>IN</sub> in funzione di L<sub>S</sub> quando F =  $F_{MIN}$  è riportato in Fig. 11.27.



Fig. 11.26



Fig. 11.27

Dalla figura si nota un minimo in  $ML_{IN}$  con un valore nettamente inferiore rispetto a quello del transistor non reazionato, cioè la reazione induttiva avvicina il  $\Gamma_S$  per l'adattamento di potenza al  $\Gamma_{OPT}$ . Come detto in precedenza al crescere di  $L_S$  in genere il guadagno diminuisce. In conclusione, il valore dell'induttanza di reazione andrà dimensionato operando un compromesso tra figura di rumore minima, adattamento e guadagno.