

Capitolo 1

Studio di reti RLC in regime sinusoidale

1.1 Circuiti risonanti

In questo capitolo si esamineranno alcuni esempi di reti passive (formate da resistenze, induttanze e capacità, reti RLC) particolarmente frequenti nei sistemi di elaborazione analogica a banda frazionale (Fractional Band Width = FBW) piccola, cioè con una banda passante BW centrata intorno ad una frequenza f_0 tale che:

$$FBW = \frac{BW}{f_0} \ll 1$$

Alcuni sistemi presentano diverse bande passanti BW_1, BW_2, \dots ognuna delle quali centrata intorno a f_{01}, f_{02}, \dots : avremo conseguentemente FBW_1, FBW_2, \dots . Le frequenze f_{0i} sono spesso frequenze di risonanza di reti RLC e il loro significato può essere spiegato come segue. Supponiamo di avere una rete con una funzione immettenza o di trasferimento $W(s)$ che presenta una situazione di poli e zeri come in Fig. 1.1.

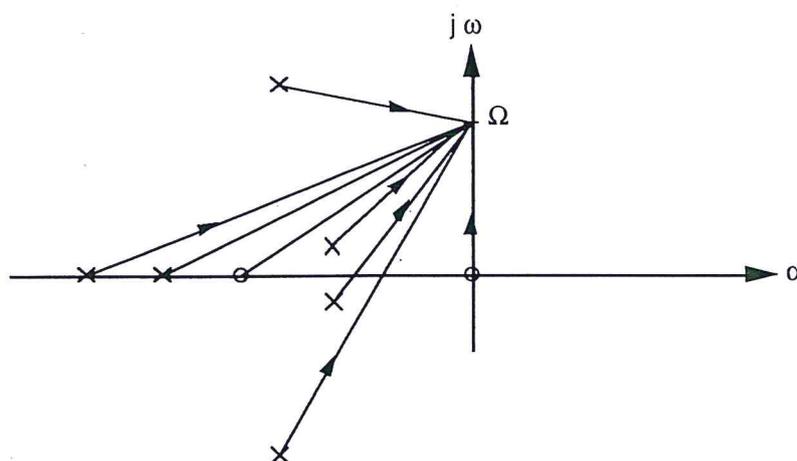


Fig. 1.1

La risposta in regime sinusoidale (v. par. 4.3, Vol. 4) è data, in modulo e fase, da $W(j\omega)$. Il suo modulo sarà determinato da un'espressione del tipo:

$$|W(j\omega)| = \frac{k Z_1 Z_2 \dots Z_m}{P_1 P_2 \dots P_n} \quad (1.1)$$

con P_i (Z_i) uguale al modulo del vettore che congiunge il polo p_i (lo zero z_i) con il punto Ω , di frequenza generica ω , situato sull'asse $j\omega$ (conto tenuto delle eventuali molteplicità).

La fase varrà:

$$\varphi_{W(j\omega)}(\omega) = \sum_{i=1}^m \varphi_{Z_i}(\omega) - \sum_{i=1}^n \varphi_{P_i}(\omega) \quad (1.2)$$

con ovvio significato dei simboli.

Ci si domanda: esistono valori ω_R di ω per i quali la rete si comporta resistivamente, cioè per i quali la risposta è in fase con l'eccitazione?

Non c'è dubbio che per $\omega = 0$ la rete ha comportamento resistivo, che sia o no presente lo zero, per ragioni fisiche evidenti. Ma la rete ha comportamento resistivo anche per quei valori di ω per i quali $\varphi_{W(j\omega)}(\omega) = k\pi$: questi vengono detti frequenze di risonanza.

Esempio 1.1 Circuito risonante serie.

Si consideri il circuito RLC serie di Fig. 1.2 e la corrente che in esso scorre a regime ad opera del generatore sinusoidale $v(t) = \hat{V} \sin \omega t$.

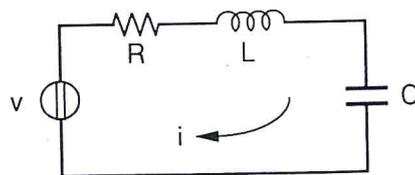


Fig. 1.2

Avremo, indicando in grassetto maiuscolo i fasori:

$$I(\omega) = \frac{V(\omega)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C V(\omega)}{1 + j\omega C R - \omega^2 L C} \quad (1.3)$$

Quando:

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (1.4)$$

la corrente di maglia vale: $I_{\max} = I_0 = V/R$, risulta in fase con $V(\omega_0)$ ed è la massima possibile. La (1.4) fornisce quindi la frequenza di risonanza della rete di Fig. 1.2.

L'andamento di $I(\omega)$ è mostrato in Fig. 1.3 in modulo e fase.

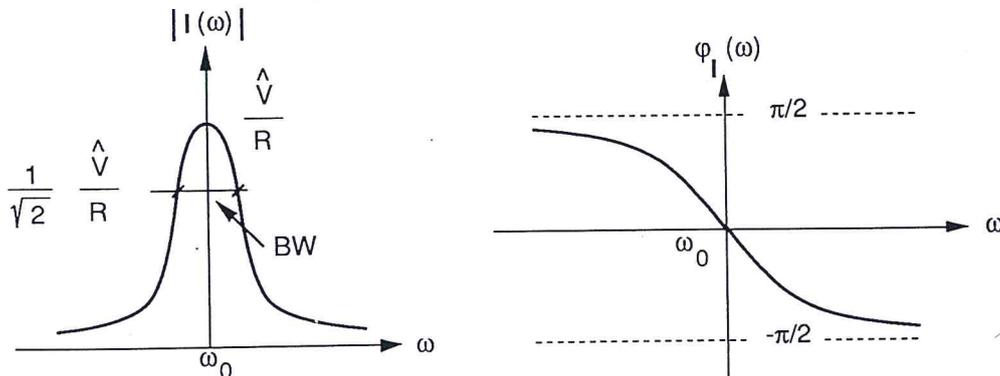


Fig. 1.3

La situazione di poli e zeri^(*) è rappresentata in Fig. 1.4 nel caso di poli complessi coniugati (c.c.), caso nel quale si fa funzionare il circuito risonante. Detto:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (1.5)$$

il fattore di merito del circuito, si ha che i poli sono complessi coniugati per $Q > 1/2$.

(*) Lo zero si ricava dall'equazione $sC = 0$, mentre i poli si ricavano dall'equazione:

$$s^2 LC + sRC + 1 = 0$$

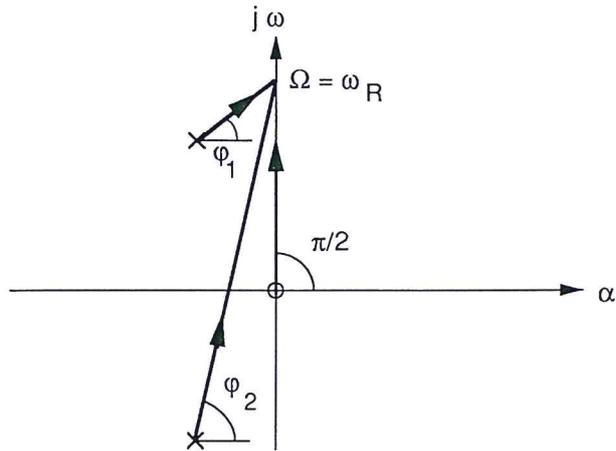


Fig. 1.4

Dalla Fig. 1.4 si ricava che $\omega_R = \omega_0$ è quella frequenza per la quale $\varphi_1(\omega_R) = (\pi/2 - \varphi_1 - \varphi_2) = 0$: il suo valore è dato dalla (1.4). Si noti che il valore dei poli è:

$$\begin{aligned}
 s_{1,2} &= \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2L} = \frac{-R \pm j \sqrt{4 \frac{L}{C} - R^2}}{2L} = \\
 &= -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\frac{R}{2L} \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \\
 &= -\alpha \pm j \beta = -\alpha \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}
 \end{aligned}$$

Quindi, per $Q \geq 10$, ossia per $\alpha \ll \omega_0$, β coincide praticamente con ω_0 . Si noti ancora che, in questa ipotesi:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (1.5')$$

Infine, poiché:

$$|I(\omega)| = \frac{\widehat{V}(\omega)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right]^2}}$$

è pari a $2^{-1/2} I_{\max}$ per:

$$R^2 = \omega_{3dB}^2 L^2 \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{3dB}^2} \right]^2$$

si ha:

$$\frac{\omega_{3dB}^2 - \omega_0^2}{\omega_{3dB}^2} = \frac{R}{\omega_{3dB} L}$$

ossia:

$$\frac{(\omega_{3dB} + \omega_0)(\omega_{3dB} - \omega_0)}{\omega_{3dB}^2} \cong \frac{2 \omega_0 (\omega_{3dB} - \omega_0)}{\omega_0^2} \cong \frac{R}{\omega_0 L}$$

valida nell'intorno di ω_0 . Si ottiene in definitiva:

$$\frac{BW}{\omega_0} = FBW = \frac{1}{Q}$$

che è quindi valida se Q non è troppo piccolo (in pratica $Q > 10$) ossia per $FBW \ll 1$. Il modulo della corrente per $\omega = \omega_0$ vale:

$$I_{\max} = |I(\omega_0)| = \frac{|V(\omega_0)|}{R} = \frac{|V(\omega_0)|}{\omega_0 L} Q$$

Esempio 1.2 Circuito risonante parallelo, anche detto antirisonante.

Si consideri il circuito di Fig. 1.5 che è il duale di quello di Fig. 1.2. La ragione di aver posto la resistenza R_s in serie a L sarà chiarita in seguito. Si ha:

$$V(s) = I(s) \frac{R_s + s L}{1 + s C R_s + s^2 L C}$$

che presenta uno zero per $s = -R_s/L = -\omega_0/Q$ se si definisce:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_s}$$

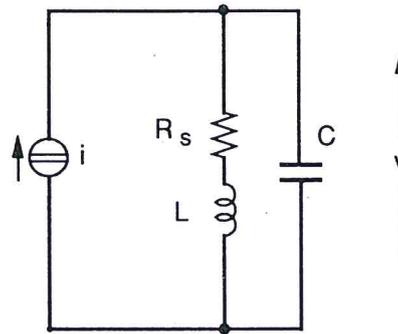


Fig. 1.5

I poli hanno la stessa espressione e la stessa collocazione di quelli del circuito serie, perché le relazioni sono formalmente identiche nel denominatore.

L'andamento di $V(\omega)$ è mostrato in Fig. 1.6 in modulo e fase (per $Q \geq 10$).

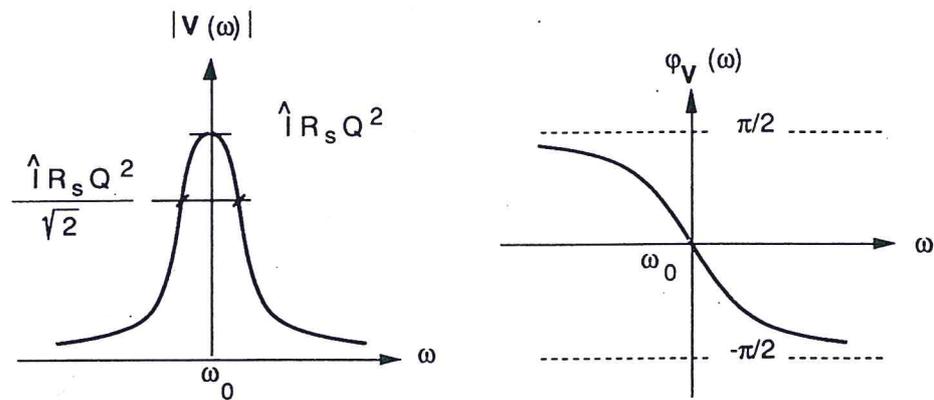


Fig. 1.6

La situazione di poli e zeri è mostrata in Fig. 1.7.

Si può dimostrare che, nell'intorno della risonanza e per $Q \geq 10$, il circuito di Fig. 1.5 è equivalente a quello di Fig. 1.8 con $R_p \cong Q^2 R_s$ e che:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{R_p}{\omega_0 L} = \omega_0 C R_p$$

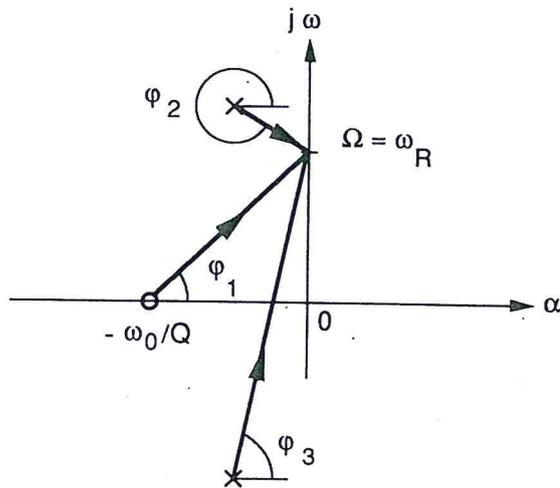


Fig. 1.7

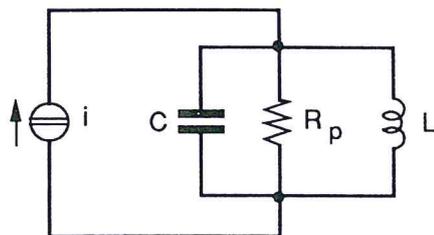


Fig. 1.8

Per $\omega \cong \omega_0$ il numeratore della $V(\omega)$ non cambia molto, quindi è il denominatore che determina la BW per la quale (e per la FBW) valgono le stesse relazioni dell'Esempio 1.1.

Il modulo della tensione per $\omega = \omega_0$ vale:

$$V_{\max} = |V(\omega_0)| \cong |I(\omega_0)| Q^2 R_s$$

1.2 Fattori di merito e perdite nei componenti

Sarà risultato chiaro che il fattore di merito Q delle risonanze studiate è un indice delle perdite per effetto Joule nel circuito in risposta armonica ove $\omega = \omega_0$. Infatti, Q è inversamente proporzionale alla parte reale dei poli c.c. della rete: essa non esiste se la rete non contiene elementi ohmici.

Vediamo come questi elementi ohmici entrano nella determinazione dei fattori di merito.

Supponiamo di avere un'induttanza L ; l'avvolgimento che la realizza avrà una resistenza R_{sL} (v. par. 1.9, Vol. 1). Definiamo "fattore di merito della bobina" il rapporto:

$$Q_{sL} = \frac{\omega L}{R_{sL}}$$

Tale rapporto è largamente indipendente dalla frequenza, perché, all'aumentare di questa, per effetto "pelle" aumenta anche R_{sL} .

L'impedenza presentata dal ramo induttivo, trascurando per il momento le capacità parassite, è quindi pari a:

$$Z_{sL} = j \omega L + R_{sL} = j \omega L + \frac{\omega L}{Q_{sL}}$$

E' comodo, a volte, considerare la perdita posta in parallelo all'induttanza. Si ha:

$$\begin{aligned} Z_{pL} &= \frac{R_{pL} j \omega L_p}{R_{pL} + j \omega L_p} = \frac{j \omega L_p R_{pL} (R_{pL} - j \omega L_p)}{R_{pL}^2 + \omega^2 L_p^2} = \\ &= \frac{j \omega L_p R_{pL}^2 + \omega^2 L_p^2 R_{pL}}{R_{pL}^2 \left(1 + \frac{\omega^2 L_p^2}{R_{pL}^2} \right)} = \frac{j \omega L_p}{1 + \frac{1}{Q_{pL}^2}} + \frac{R_{pL}}{\left(1 + \frac{1}{Q_{pL}^2} \right) Q_{pL}^2} \equiv \\ &\equiv j \omega L_p + \frac{\omega^2 L_p^2}{R_{pL}} \end{aligned}$$

se $Q_{pL} = \frac{R_{pL}}{\omega L_p} \gg 1$. Poiché deve essere $Z_{sL} = Z_{pL}$, avremo:

$$L_p = L \left(1 + \frac{1}{Q_{pL}^2} \right) \cong L$$

$$R_{pL} = R_{sL} Q_{pL}^2 \left(1 + \frac{1}{Q_{pL}^2} \right) \cong R_{sL} Q_{pL}^2 = R_{sL} Q_{sL}^2$$

$$Q_L = Q_{pL} = Q_{sL} = \frac{\omega L}{R_{sL}} = \frac{R_{pL}}{\omega L_p} \cong \frac{R_{pL}}{\omega L} \quad (1.6)$$

Una bobina con perdite può essere quindi rappresentata indifferentemente con una resistenza serie o con un parallelo e il suo fattore di merito può essere espresso in funzione sia della perdita serie che dell'equivalente perdita parallelo.

L'approssimazione adottata richiede quindi che sia $Q_L^2 \gg 1$, in pratica $Q_L \geq 10$.

Definiamo "fattore di merito di una capacità" il prodotto:

$$Q_{pC} = \omega C R_{pC}$$

dove R_{pC} è la resistenza di perdita del dielettrico che realizza la capacità (v. par. 1.9, Vol. 1). Anche Q_{pC} non varia molto con la frequenza in quanto, all'aumentare di questa, i fenomeni di isteresi dielettrica fanno diminuire R_{pC} .

Similmente a quanto fatto per l'induttanza, si può considerare la perdita posta in serie alla capacità e si ha, procedendo in modo analogo a quanto fatto precedentemente:

$$C_s = C \left(1 + \frac{1}{Q_{pC}^2} \right)$$

$$R_{sC} = \frac{R_{pC}}{1 + Q_{pC}^2}$$

$$Q_C = Q_{pC} = Q_{sC} = \omega C R_{pC} = \frac{1}{\omega C_s R_{sC}} \quad (1.7)$$

Le (1.6) e (1.7) danno quindi un modello dei componenti reali bobina e condensatore: un ramo serie o uno parallelo, secondo la comodità del calcolo da eseguire.

Si supponga ora di disporre L e C in serie e di voler ricavare la relazione tra i Q dei componenti e quello della risonanza. Si ha:

$$Z_{\text{serie}}(s) = \frac{R_{pC} (1 - s R_{pC} C)}{1 - s^2 C^2 R_{pC}^2} + s L + R_{sL}$$

Sostituendo s con $j\omega$ ed utilizzando le (1.6) e (1.7), si ha:

$$Z_{\text{serie}}(j\omega) = \frac{\omega L}{Q_L} + \frac{Q_C}{\omega C (1 + Q_C^2)} + j\omega L - \frac{j Q_C^2}{\omega C (1 + Q_C^2)}$$

e quindi, per riportarsi al caso dell'Esempio 1.1, basta porre:

$$\frac{\omega L}{Q_L} + \frac{Q_C}{\omega C (1 + Q_C^2)} = \frac{\omega L}{Q}$$

dalla quale si ricava, posto $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_L} + \frac{Q_C}{1 + Q_C^2} \equiv \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} \quad (1.8)$$

Poiché è sempre $Q_C \gg Q_L$, nella serie di una bobina e un condensatore, il Q della risonanza che ne risulta è determinato dal Q della bobina, cioè dalle sue perdite. Il Q_L può assumere valori compresi tra 10 e 200.

Similmente, nel parallelo di una bobina e di un condensatore si ha:

$$Y_{\text{parallelo}}(s) = s C + G_{pC} + \frac{G_{sL}}{1 + s L G_{sL}}$$

e per $s = j\omega$:

$$Y_{\text{parallelo}}(j\omega) = \frac{\omega C}{Q_C} + j\omega C + \frac{Q_L}{\omega L (1 + Q_L^2)} - \frac{j Q_L^2}{\omega L (1 + Q_L^2)}$$

Per riportarsi al caso dell'Esempio 1.2, basta uguagliare la parte reale a $\omega_0 C/Q$ e si ottiene:

$$\frac{1}{Q} \cong \frac{1}{Q_C} + \frac{1}{Q_L} \quad (1.9)$$

Quindi, anche la forma della risonanza parallelo è determinata dalle perdite nella bobina.

In generale, seguire i procedimenti che hanno portato alle (1.8) e (1.9) è possibile solo in casi molto semplici, come quelli trattati. Per cui, data una rete che presenti una risonanza, per calcolare il Q che la caratterizza, si deve trovare il valore dei poli della rete e poi calcolare il rapporto $Q = \beta / (2 \alpha)$ relativo alla coppia di poli c.c. che danno luogo alla risonanza.

Esempio 1.3 Sia data la rete a π di Fig. 1.9. Se ne studino le proprietà nell'intorno della sua frequenza di risonanza, nel caso che R_2 e R_1 siano tali che Q_{C1} e Q_{C2} risultino molto minori di Q_L , ma ancora molto maggiori di 1. In altre parole, le perdite dominanti della rete siano quelle nei condensatori.

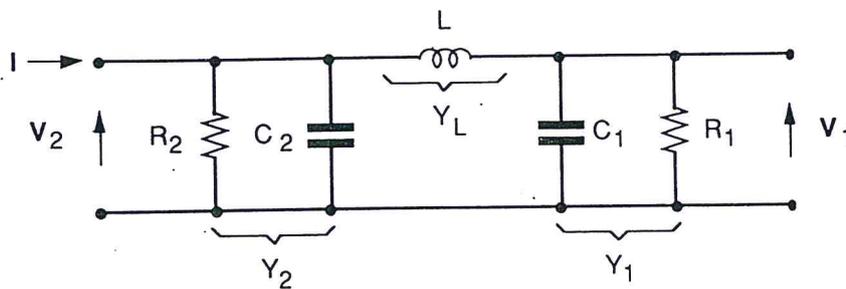


Fig. 1.9

Dall'esame dello schema si ha:

$$\begin{cases} I = V_2 Y_2 + (V_2 - V_1) Y_L \\ 0 = (V_2 - V_1) Y_L - V_1 Y_1 \end{cases}$$

e cioè:

$$\begin{cases} -V_1 Y_L + V_2 (Y_L + Y_2) = I \\ -V_1 (Y_1 + Y_L) + V_2 Y_L = 0 \end{cases}$$

Quindi, per determinare i poli, dovremo risolvere l'equazione:

$$\Delta = Y_2 Y_L + Y_L Y_1 + Y_1 Y_2 = 0$$

Sostituendo le espressioni delle Y ed eseguendo le semplificazioni del caso, si ha:

$$s^3 + s^2 \frac{C_1 G_2 + C_2 G_1}{C_1 C_2} + s \frac{C_1 + C_2 + G_1 G_2 L}{C_1 C_2 L} + \frac{G_1 + G_2}{C_1 C_2 L} = 0$$

Detti s_1 e s_2 i due poli c.c., si ha $s_1 s_2 = |s_1|^2 \cong \omega_0^2$ se il Q della risonanza è, come al solito, almeno maggiore di 10.

La frequenza di risonanza si trova imponendo che una funzione di trasferimento, per esempio V_1/I [v. la (1.12)], sia reale sull'asse $j\omega$, con il che abbiamo:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} = \frac{1}{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \left(1 + \frac{1}{Q_{C1} Q_{C2}} \right) \cong \frac{1}{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \quad (1.10)$$

Poiché il prodotto dei poli è pari al termine noto dell'equazione $\Delta = 0$, detto s_0 il polo reale, si ha:

$$s_0 \cong - \frac{G_1 + G_2}{C_1 C_2 L} \frac{1}{\omega_0^2} = - \frac{G_1 + G_2}{C_1 + C_2}$$

Per la somma dei poli si avrà:

$$-(s_0 + s_1 + s_2) = \frac{C_1 G_2 + C_2 G_1}{C_1 C_2}$$

e quindi:

$$-2 \operatorname{Re}[s_1] = 2 \alpha = s_0 + \frac{C_1 G_2 + C_2 G_1}{C_1 C_2} = \frac{G_2 C_1^2 + G_1 C_2^2}{C_1 C_2 (C_1 + C_2)}$$

da cui si ottiene:

$$Q = \frac{\beta}{2 \alpha} = \frac{(C_1 + C_2) Q_{C1} Q_{C2}}{Q_{C1} C_1 + Q_{C2} C_2} = \frac{(X_1 + X_2) Q_{C1} Q_{C2}}{X_2 Q_{C1} + X_1 Q_{C2}} \quad (1.11)$$

Se uno dei due fattori di merito è molto maggiore dell'altro, per esempio $Q_{C1} \gg Q_{C2}$, si ha: $Q \cong Q_{C2}$ perché, come al solito, è il

componente peggiore che determina il livello delle perdite della rete.

Il caso in questione rappresenta quindi quello di una rete con un polo reale negativo e due c.c. che determinano una risonanza, la forma della quale è determinata dal Q ricavato.

Risolvendo per V_1 si ha:

$$V_1(s) = \frac{I(s)}{s^3 (L C_1 C_2) + s^2 (L C_1 G_2 + L C_2 G_1) + s (C_2 + C_1 + L G_1 G_2) + G_1 + G_2} \quad (1.12)$$

che, per $s = j\omega_0$, diviene:

$$V_1(\omega_0) = \frac{I(\omega_0)}{-(C_1 + C_2) (G_2/C_2 + G_1/C_1) + G_1 + G_2} \quad (1.13)$$

Se si sceglie $C_1 \gg C_2$ si ha:

$$V_1(\omega_0) \cong \frac{I(\omega_0)}{G_2 (-C_1/C_2)} \quad (1.14)$$

con inversione rispetto al verso assunto in Fig. 1.9. La situazione è analoga a quella mostrata in Fig. 1.7, se si sostituisce un polo allo zero. Si ha:

$$\angle V_1(\omega_0) = 0 - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \cong -\frac{\pi}{2} - 2\pi - \frac{\pi}{2} = -3\pi \quad (1.15)$$

poiché è, in generale, $|s_0| \cong \frac{\omega_0}{Q_{C1}} \ll \omega_0$, a causa delle scelte di progetto effettuate sulla rete di sfasamento.

In definitiva V_1 è massima a ω_0 (se Q è almeno il solito valore ≥ 10) e la sua fase è di 180° rispetto a V_2 . In questo caso, cioè, la risonanza avviene con un'inversione di fase, che non cambia, ovviamente, la sostanza delle cose dette. La rete studiata è detta rete di Colpitts.

Conclusioni analoghe a quelle ora descritte si traggono per la rete di Hartley che è la duale di quella di Colpitts e per la rete genericamente formata da tre impedenze Z_1 , Z_2 e Z_3 (Fig. 1.10).

E' utile vedere qual è la resistenza vista dal generatore alla risonanza. In generale, nelle reti a T e a π di sole reattanze (v. Fig. 1.11), si ha:

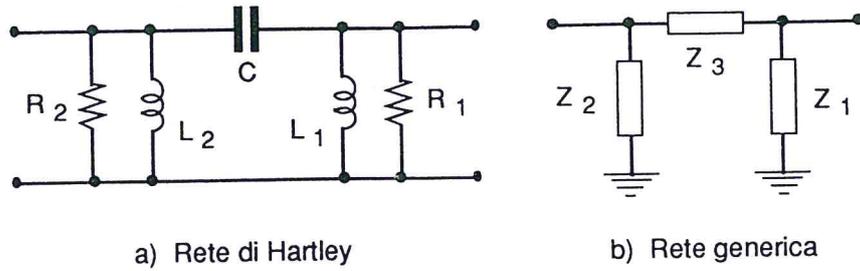


Fig. 1.10

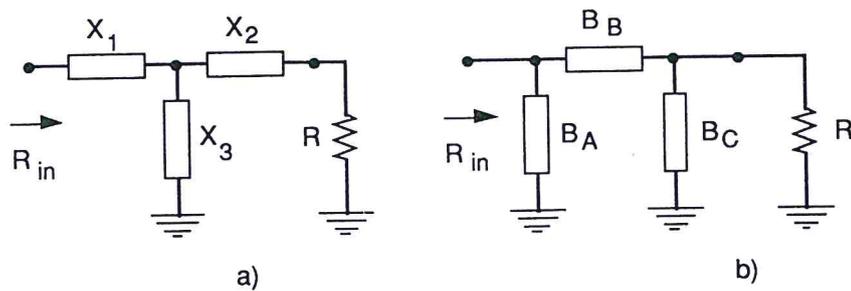


Fig. 1.11

$$R_{in} = R \frac{X_1 + X_3}{X_2 + X_3} \quad \text{per il caso di Fig. 1.11.a}$$

$$G_{in} = \frac{1}{R_{in}} = G \frac{B_A + B_B}{B_C + B_B} \quad \text{per il caso di Fig. 1.11.b}$$

ambidue valide solo per $\omega \equiv \omega_0$. Nel caso della rete di Colpitts si ottiene:

$$R_{in} = R \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 \quad (1.16)$$

ossia la rete funziona come un trasformatore ideale con rapporto di trasformazione pari al rapporto delle capacità^(*).

(*) In realtà, a ω_0 , per l'approssimazione fatta nella (1.10), la rete presenta un'impedenza di ingresso con una parte reale pari a quella detta [quindi in ingresso si vede il parallelo di R_2 e $R_1(C_1/C_2)^2$] e una parte immaginaria pari a: $\text{Im}(Z_{in}) = - (Q_{C2}/Q_{C1})\omega_0 L$ ovviamente tanto più piccola quanto più $Q_{C2} < Q_{C1}$.

1.3 Il coefficiente di stabilità in frequenza

Si definisce *coefficiente di stabilità in frequenza di una risonanza* la grandezza:

$$S_F = \omega_0 \left| \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} \quad (1.17)$$

La ragione del nome e del simbolo usati risulterà chiara nel seguito; $\varphi(\omega)$ è la fase della funzione di trasferimento considerata.

Riprendendo quanto detto all'Esempio 1.1, si ha:

$$\varphi(\omega) = - \operatorname{arctg} \frac{\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}{R}$$
$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = - \frac{1}{1 + \left[\frac{\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}{R} \right]^2} \frac{1}{R} \left[L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) - \omega L \frac{\omega_0^2}{\omega^4} 2\omega \right]$$

e quindi:

$$\left[\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_0} = \frac{2L}{R}$$

per cui:

$$S_F = 2 \frac{\omega_0 L}{R} = 2Q \quad (1.17')$$

Similmente, per la rete dell'Esempio 1.3 si ha:

$$S_F = \omega_0 \left| \frac{d\varphi_1}{d\omega} + \frac{d\varphi_2}{d\omega} + \frac{d\varphi_3}{d\omega} \right|_{\omega_0}$$

con:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{|S_0|}$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\omega - \beta}{\alpha}$$

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{\omega + \beta}{\alpha}$$

Ne discende che, poiché $\beta \cong \omega_0$ per $Q > 10$:

$$\left(\frac{d \varphi_1}{d \omega} \right)_{\omega_0} = \frac{1}{|S_0|} \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{S_0^2}} \cong \frac{|S_0|}{\omega_0^2}$$

$$\left(\frac{d \varphi_2}{d \omega} \right)_{\omega_0} = \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \beta}{\alpha} \right)^2} \cdot \frac{1}{\alpha} \right]_{\omega_0} \cong \frac{1}{\alpha}$$

$$\left(\frac{d \varphi_3}{d \omega} \right)_{\omega_0} = \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega + \beta}{\alpha} \right)^2} \cdot \frac{1}{\alpha} \right]_{\omega_0} \cong \frac{\alpha}{4 \omega_0^2}$$

E' evidente, dati i valori numerici plausibili, che:

$$S_F \cong \frac{\omega_0}{\alpha} = 2 Q \quad (1.17'')$$

Risulta quindi ancora più chiaro il ruolo giocato dal Q connesso alla coppia di poli c.c. che determina la risonanza.

Una via generale di calcolo di S_F può essere data come segue. Detti $\operatorname{Re}(\omega)$ e $\operatorname{Im}(\omega)$ rispettivamente la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria della funzione di trasferimento considerata, si ha:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}$$

$$\frac{d \varphi(\omega)}{d \omega} = \frac{\operatorname{Re}^2(\omega)}{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)} \left[\frac{1}{\operatorname{Re}(\omega)} \frac{d \operatorname{Im}(\omega)}{d \omega} - \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}^2(\omega)} \frac{d \operatorname{Re}(\omega)}{d \omega} \right]$$

L'espressione, calcolata per $\omega = \omega_0$, diventa:

$$\left[\frac{d \varphi(\omega)}{d \omega} \right]_{\omega_0} = \frac{1}{\operatorname{Re}(\omega_0)} \left[\frac{d \operatorname{Im}(\omega)}{d \omega} \right]_{\omega_0} \quad (1.18)$$

1.4 Il quarzo come elemento circuitale

Il quarzo (SiO_2) cristallino è un ottimo isolante la cui caratteristica interessante in questa sede è la piezoelettricità. Esiste cioè una relazione, in buona approssimazione lineare, tra il vettore degli sforzi ϕ , il vettore campo elettrico E e quello delle deformazioni x :

$$\phi = A E$$

$$\phi = B x$$

dove A , detto tensore piezoelettrico, è una matrice in generale invertibile e B , anch'essa in generale invertibile, è detta matrice degli sforzi e delle deformazioni (matrice stress-strain).

La teoria della piezoelettricità richiede alcune cautele e non è immediatamente esponibile. Ci si limiterà quindi a ricordare che il fenomeno della piezoelettricità collega sforzo, campo e deformazione. Ciò significa che:

- applicato un campo elettrico al cristallo, esso diviene sede di sforzi che provocano deformazioni del reticolo;
- applicata una sollecitazione meccanica, questa induce nel cristallo una deformazione accompagnata da un campo elettrico che sviluppa una differenza di potenziale, in principio lungo tutte le tre direzioni di riferimento;
- questo fenomeno avviene con la struttura di una risonanza con un Q dell'ordine di 10^4 - 10^6 a seconda della direzione utilizzata, della bontà del materiale, delle condizioni nelle quali esso è portato a lavorare, etc.

Esistono nel cristallo direzioni lungo le quali le relazioni poste si semplificano fino a diventare scalari. Il risultato di questo studio è che le piastrine di materiale con lati orientati secondo le direzioni privilegiate hanno frequenze di risonanza che possono essere ricavate da relazioni del tipo:

$$\omega_0 = \frac{k}{d} \quad (1.19)$$

ove d è la dimensione delle piastrine nella direzione significativa e k è una costante che dipende dall'orientamento della piastrina rispetto agli assi cristallografici. I diversi tagli prendono nomi convenzionali: taglio X, AT, SF e altri che danno un'indicazione,

anche se sommaria, delle caratteristiche del componente e del suo comportamento. Il quarzo, comunque, se di classe elevata, è sempre accompagnato da un certificato emesso dalla casa produttrice che ne elenca i parametri significativi, tra i quali:

- frequenza di risonanza;
- parametri circuitali di 1^a, 3^a e 5^a armonica(*);
- coefficienti di deriva termica;
- Q delle varie armoniche;
- trascinabilità.

Il componente è quindi una piastrina (Fig. 1.12) sulle facce della quale è stato depositato per evaporazione un sottile strato metallico (in genere oro) che dà luogo ad una capacità di valore C_0 e che realizza il contatto elettrico.

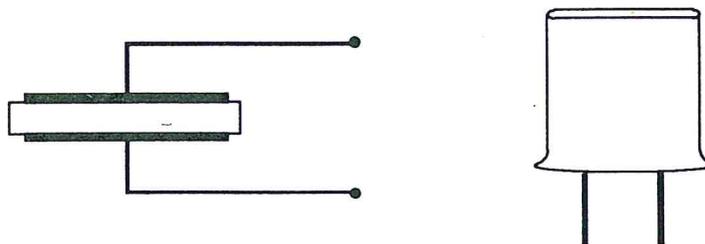


Fig. 1.12

Il tutto viene incapsulato in un contenitore sul quale vengono stampigliati i valori di alcune delle caratteristiche sopra menzionate.

E' evidente che il Q del quarzo risente molto della quantità di materiale aggiuntivo che l'oscillazione deve mettere in moto, tanto che i quarzi per applicazioni speciali sono incapsulati sotto vuoto in contenitori di vetro.

Il circuito equivalente linearizzato del componente è mostrato in Fig. 1.13.a, nella quale i valori di R, L e C variano a seconda dell'armonica sulla quale si sta lavorando. Il valore della reattanza ai capi del componente varia come mostrato in Fig. 1.13.b.

(*) La prima armonica è quella che consente di allocare un quarto di lunghezza d'onda della perturbazione sonora lungo la dimensione significativa della piastrina. E' evidente che le armoniche pari non forniscono tensione tra le facce della piastrina.

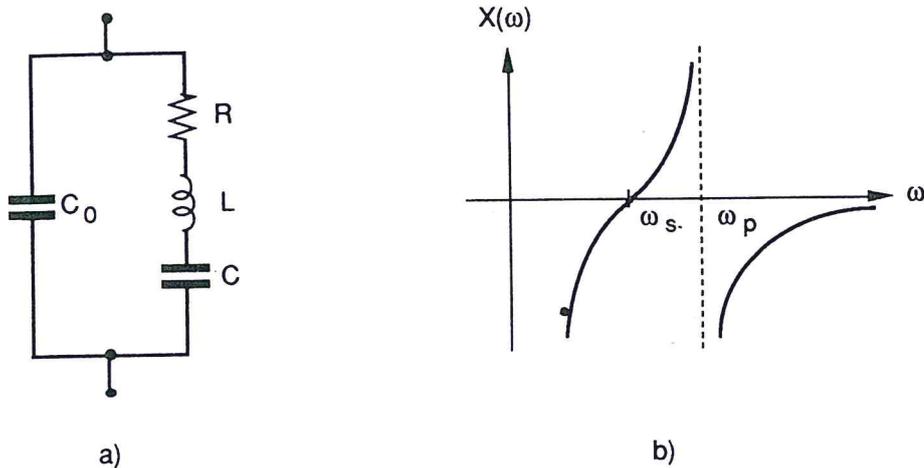


Fig. 1.13

Si determinano cioè due risonanze, dette serie e parallelo, nel senso che la prima è descritta da quanto detto nell'Esempio 1.1 (ed è determinata dal ramo RLC) e la seconda è stata studiata nell'Esempio 1.2.

Valori tipici dei componenti equivalenti per un quarzo AT da 10 MHz in prima armonica sono:

- $f_0 = 9.999.995 \text{ Hz}$
- $L = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ H}$
- $C = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ pF}$
- $C_0 = 4.5 \text{ pF}$
- $R = 8 \Omega$

Le frequenze ω_s e ω_p si situano su valori tra loro molto prossimi(*). Il ramo di $X(\omega)$ che da ω_s va all'infinito presenta quindi una derivata tendente ad infinito.

E' utile ricavare l'espressione dell'impedenza equivalente del quarzo intorno a ω_s . Si ha che:

$$X(\omega_s) = X_L(\omega_s) + X_C(\omega_s) = \omega_s L - \frac{1}{\omega_s C} = 0 \quad (1.20)$$

$$\left(\frac{dX_L}{d\omega} \right)_{\omega_s} = \left(\frac{dX_C}{d\omega} \right)_{\omega_s} = L \quad (1.20')$$

$$X(\omega) \cong X(\omega_s) + 2L(\omega - \omega_s) = 2L\Delta\omega \quad (1.20'')$$

(*) Per questa ragione si parla, in genere, di frequenza di risonanza del quarzo e la si indica col pedice 0.

L'impedenza del componente è il parallelo di $R + jX(\omega)$ e $jX_{C_0}(\omega)$.

Si ottiene quindi il bipolo mostrato in Fig. 1.14 ove:

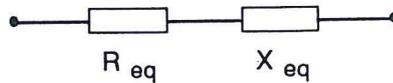


Fig. 1.14

$$R_{eq} = \frac{R X_{C_0}^2}{R^2 + (X + X_{C_0})^2} \cong \frac{R}{\left(1 + \frac{2L\Delta\omega}{X_{C_0}}\right)^2}$$

$$X_{eq} = \frac{X_{C_0}(R^2 + X X_{C_0} + X^2)}{R^2 + (X + X_{C_0})^2} \cong \frac{2L\Delta\omega}{\left(1 + \frac{2L\Delta\omega}{X_{C_0}}\right)^2} \quad (1.21)$$

La frequenza di risonanza serie del quarzo può essere "trascinata", ossia spostata, connettendo in serie al bipolo di Fig. 1.14 una capacità C_L . Si determina (v. App. A) una nuova risonanza serie a frequenza:

$$f_{C_L} \cong f_0 \left[1 + \frac{C}{2C_L + 4C_0} \right] \quad (1.22)$$

alla quale la resistenza equivalente prende il nuovo valore:

$$R_{eq_{C_L}} \cong R \left[1 + \frac{2C_0}{C_L + 2C_0} \right] \quad (1.23)$$

Il trascinamento assume l'aspetto di Fig. 1.15 per le prime tre armoniche di interesse.

La trascinabilità è limitata dal valore di $R_{eq_{C_L}}$ che cresce per $C_L \rightarrow 0$. Si noti che la trascinabilità diminuisce quando il quarzo è usato in armonica superiore. Conseguenza di ciò è che un quarzo in armonica superiore risente meno degli elementi parassiti inevitabilmente presenti nello schema dove il componente è

montato e sarà utilizzato in applicazioni che richiedono grande stabilità di frequenza.

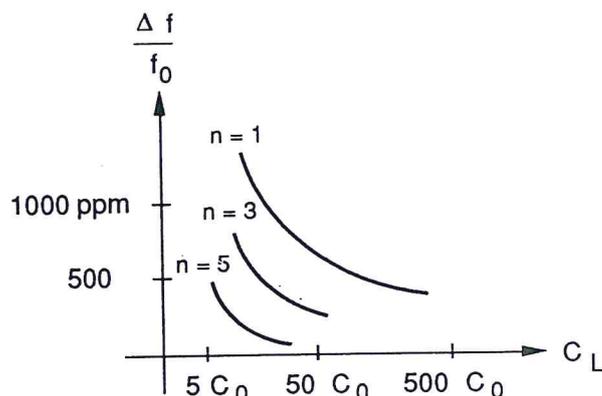


Fig. 1.15

Poiché:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{X_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} \cong \frac{2 L \Delta\omega}{R}$$

il coefficiente S_F vale:

$$S_F = 2 Q \quad (1.24)$$

come ci si doveva aspettare. E' evidente, a questo proposito, la superiorità del quarzo rispetto a reti RCL.

Il quarzo trascinato risente della presenza di C_L per cui, se il quarzo ha un $Q \cong 10^5$ ed una $f_0 = 5 \cdot 10^6$ Hz, per mantenere le stesse prestazioni, un condensatore da 10 pF dovrà avere una resistenza di perdita dell'ordine di:

$$R_{pC} = \frac{Q}{\omega_0 C} = \frac{10^5}{2 \pi 5 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-12}} \cong 320 \text{ M}\Omega$$

che fornisce un criterio per la scelta del tipo di condensatore.

C'è da notare che, quanto detto, rappresenta un esame basato su un modello circuitale lineare: il quarzo in realtà ha un funzionamento che, almeno all'innesco delle oscillazioni, è fortemente non lineare, tanto da necessitare di un surplus di

energia per essere posto in oscillazione. Un tale comportamento è tanto più marcato quanto più l'armonica di lavoro è alta.

Valgono, infine, considerazioni analoghe a quelle ora derivate se si studia la risonanza parallelo intorno alla frequenza ω_p .