

## Capitolo 3

### Le reti adattatrici

#### 3.1 Introduzione

La rete di Fig. 1.5 può essere pensata come una rete adattatrice; infatti, per frequenze contenute entro la BW della risonanza essa presenta un'impedenza resistiva pari a circa  $Q^2 R_s$  e quindi ha trasformato il valore di  $R_s$  in uno che può essere più conveniente.

Si noti infatti che, dal momento che L e C non dissipano, la trasformazione può essere usata per adattare un carico alla resistenza di uscita del generatore.

Allo stesso modo può essere considerata, nei confronti di  $R_1$ , la rete di Fig. 1.9 che trasforma, nella sua BW, la resistenza di chiusura secondo la (2.11).

Considerazioni analoghe possono essere fatte per le reti di Fig. 1.11.

Sfortunatamente, gli esempi visti hanno un difetto comune: sono poco flessibili, nel senso che, data la resistenza di chiusura  $R_L$  e la resistenza che si vuole vedere  $R_{in}$ , è fissato il rapporto di trasformazione, quindi il Q della rete, quindi la sua BW.

Per chiarire meglio quanto detto, si consideri di nuovo il circuito risonante parallelo separando il caso (Fig. 3.1.a) nel quale

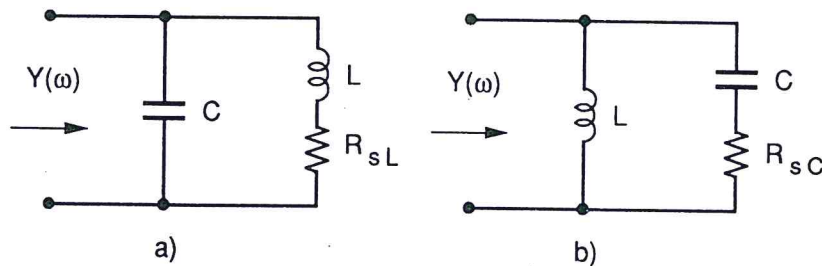


Fig. 3.1

la perdita si localizza nella resistenza  $R_{sL}$  in serie all'induttanza, da quello (Fig. 3.1.b) che vede prevalere la perdita nel condensatore rappresentata anch'essa da una resistenza serie  $R_{sC}$ .

Nel primo caso si avrà:

$$Y(\omega) = \frac{R_{sL}}{R_{sL}^2 + \omega^2 L^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L}{R_{sL}^2 + \omega^2 L^2} \right) \quad (3.1)$$

con una frequenza di risonanza pari a:

$$\omega_0 = \left( \frac{1}{LC} - \frac{R_{sL}^2}{L^2} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

ed una resistenza di ingresso alla risonanza  $R_{in0}$  pari a :

$$R_{in0} = R_{sL}(1 + Q_L^2) \cong R_{sL} Q_L^2 \quad (3.3)$$

e si ritrova un risultato che fu approssimato per  $Q_L \gg 1$  nella discussione a proposito della Fig. 1.8. Inoltre si ha:

$$Q_{tot} = \frac{R_{sL}(1 + Q_L^2)}{\omega L} = \frac{1}{Q_L} + Q_L \cong R_{sL}(1 + Q_L^2) \omega C \cong Q_L \quad (3.4)$$

che controlla la selettività della risonanza.

**Esempio 3.1** Si voglia trasformare la resistenza vista verso una linea di impedenza caratteristica reale  $Z_0 = 50 \Omega$  e adattata nella sezione terminale, sull'uscita di un transistor che si presenta con un'impedenza, anch'essa reale, di  $2 \text{ k}\Omega$  intorno alla frequenza  $f_0 = 1 \text{ MHz}$ .

La linea sarà connessa al circuito risonante al posto di  $R_{sL}$  che quindi coinciderà con  $Z_0 = 50 \Omega$ . Il rapporto  $R_{in0}/R_{sL} = 40 \cong Q_{tot}^2$ , ci dice che  $Q_{tot}$  non è  $\gg 1$  e quindi dalle (3.3) e (3.4):

$$L = \frac{2 \cdot 10^3}{2 \pi \cdot 10^6 \sqrt{39}} = 51 \mu\text{H}$$

$$C = \frac{\sqrt{39}}{2 \cdot 10^3 \cdot 2 \pi \cdot 10^6} = 497 \text{ pF}$$

Il fattore correttivo  $(R_{sL}/L)^2$ , che compare nella frequenza di risonanza risulta trascurabile. Il rapporto di trasformazione della resistenza ha fissato la BW della risonanza, che vale:

$$BW = \frac{10^6}{\sqrt{39}} \cong 160 \text{ kHz}$$

Nel caso di Fig. 3.1.b si ha, procedendo in modo del tutto analogo:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC - R_{sC}^2 C^2} \quad (3.5)$$

$$R_{in0} = R_{sC} (1 + Q_C^2) \quad (3.6)$$

$$Q_{tot} = R_{sC} (1 + Q_C^2) \omega C = Q_C + \frac{1}{Q_C} \cong \frac{R_{sC} (1 + Q_C^2)}{\omega L} \cong Q_C \quad (3.7)$$

dove, per garantire la selettività della risonanza, bisogna verificare che  $R_{sC}^2 C^2 \ll LC$ . Anche in questo caso il rapporto di trasformazione tra le resistenze determina la BW della risonanza.

Nella Tab. 3.1 sono riassunte le relazioni di passaggio tra la disposizione serie (per brevità indicata col solo pedice "s") e quella parallelo (pedice "p") per le combinazioni RC e RL, insieme alle definizioni del fattore di merito che sono state date nel par. 1.2.

Tab. 3.1

| RL   | RC                                  | se $Q > 10$   |
|--|-------------------------------------|---|
| $Q_s = \omega L_s / R_s$                       | $Q_s = 1 / (\omega C_s R_s)$        |   |
| $Q_p = R_p / (\omega L_p)$                     | $Q_p = \omega C_p R_p$              |   |
| $R_p = R_s (1 + Q_s^2)$                        | $R_p = R_s (1 + Q_s^2)$             | $1 + Q_s^2 \cong Q_s^2$                                     |
| $L_p = L_s \left( 1 + \frac{1}{Q_s^2} \right)$ | $C_p = C_s \frac{Q_s^2}{1 + Q_s^2}$ | $1 + \frac{1}{Q_s^2} \cong \frac{Q_s^2}{1 + Q_s^2} \cong 1$ |
| $Q_s = Q_p = Q_L$                              | $Q_s = Q_p = Q_C$                   |   |

La necessità di considerare il caso di fattori di merito non eccessivi risiede nel fatto che il valore del Q dipende dal rapporto di trasformazione che si vuole ottenere e può quindi essere qualunque.

Per guadagnare più indipendenza nelle scelte, possono usarsi, tra gli altri, due modi:

- circuiti antirisonanti con rami a presa centrale;
- trasformatori.

Il presente capitolo è devoluto all'esame di queste architetture circuitali, molto usate nelle applicazioni a piccola FBW.

### 3.2 Circuito antirisonante con presa centrale sul ramo capacitivo

Si consideri lo schema di Fig. 3.2.

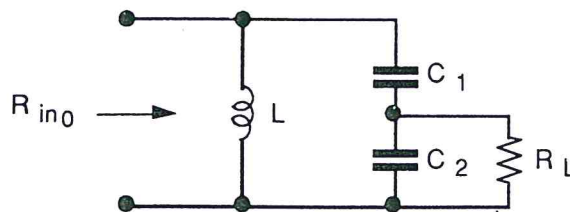


Fig. 3.2

Con una trasformazione parallelo-serie del ramo  $R_L // C_2$ , si può passare allo schema di Fig. 3.3.a (analoga alla Fig. 3.1.b), nella quale, posto  $Q_{C_2} = \omega R_L C_2$ , si ha, dalla Tab. 3.1:

$$C_{2s} = C_2 \frac{1 + Q_{C_2}^2}{Q_{C_2}^2} \quad (3.8)$$

$$R_{Ls} = \frac{R_L}{1 + Q_{C_2}^2} \quad (3.9)$$

e, posto:

$$C = \frac{C_{2s} C_1}{C_{2s} + C_1} \quad (3.10)$$

si ha:

$$R_{in0} = R_{Ls} (1 + Q_C^2) = \frac{R_L (1 + Q_C^2)}{1 + Q_{C2}^2} \quad (3.11)$$

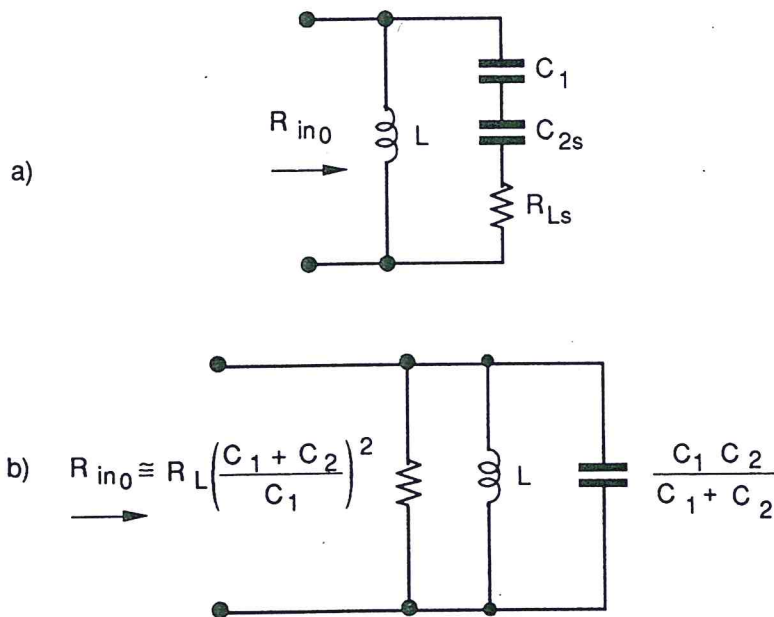


Fig. 3.3

Dalla (3.11), poiché il rapporto di trasformazione, la frequenza centrale e la BW della risonanza sono noti, si può ricavare, applicando la (3.7), una prima valutazione di  $Q_{C2}$ , per vedere se è possibile o meno usare le formule approssimate. Si ottiene:

$$Q_{tot} \cong Q_C \cong Q_{C2} \sqrt{\frac{R_{in0}}{R_L}} \cong \frac{f_0}{BW} \quad (3.12)$$

che fornisce un valore di prova per  $Q_{C_2}$ . Se questo è maggiore di 10 si possono semplificare le formule da (3.8) a (3.11), viceversa esse debbono essere usate come sono.

Nel caso sia possibile la semplificazione, ne consegue il circuito equivalente mostrato in Fig. 3.3.b.

**Esempio 3.2** Si debba adattare il solito carico di  $50 \Omega$  ad una sorgente con resistenza di uscita di  $4 \text{ k}\Omega$  intorno a  $f_0 = 3 \text{ MHz}$  e su una  $BW = 200 \text{ kHz}$ . Si ha, usando la (3.12):

$$Q_{\text{tot}} = \frac{3000}{200} = 15 \quad \checkmark$$

$$C = \frac{Q_{\text{tot}}}{\omega_0 R_{\text{in}0}} = \frac{15}{2 \pi 3 \cdot 10^6 4 \cdot 10^3} \cong 200 \text{ pF} \quad \checkmark$$

$$L = \frac{1}{(2 \pi 3 \cdot 10^6)^2 200 \cdot 10^{-12}} = 14 \mu\text{H} \quad \checkmark$$

$$Q_{C_2} \cong \frac{Q_{\text{tot}}}{\sqrt{R_{\text{in}0}/R_L}} = \frac{15}{\sqrt{80}} = 1.7 \quad ?$$

Dato il valore stimato di  $Q_{C_2}$  non è possibile usare semplificazioni e quindi:

$$Q_{C_2}^2 = (1 + Q_{\text{tot}}^2) \frac{1}{R_{\text{in}0}/R_L} - 1 \cong 225 \frac{1}{80} - 1 = 1.8$$

$$Q_{C_2} = 1.34 \quad \checkmark$$

$$C_2 = \frac{1.34}{2 \pi 3 \cdot 10^6 50} = 1.4 \text{ nF} \quad \checkmark$$

$$C_{2s} = 1.4 \frac{1 + 1.8}{1.8} = 2.2 \text{ nF} \quad \checkmark$$

$$C_1 = \frac{C_{2s} C}{C_{2s} - C} = \frac{2.2 \cdot 0.2}{2.2 - 0.2} = 0.22 \text{ nF} \quad \checkmark$$

$$R_{Ls} = \frac{50}{1 + 1.8} = 17.9 \Omega \quad \checkmark$$

Per verifica:

$$R_{in0} \cong 17.9 \cdot 15^2 = 4027 \Omega$$

$$LC = 14 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^{-12} =$$

$$= 28 \cdot 10^{-16} \gg R_{Ls}^2 C^2 = (17.9 \cdot 200)^2 \cdot 10^{-24} =$$

$$= 0.13 \cdot 10^{-16}$$

$$Q_{tot} = Q_C = 14.5$$

Dall'Esempio 3.2 si rileva come la presa centrale abbia permesso di fissare indipendentemente il rapporto di trasformazione e la BW dell'adattamento.

Si noti che il  $Q_{tot}$  ricavato con la (3.12) è il valore del fattore di merito detto "non caricato" (unloaded), ossia della rete adattatrice con il suo carico. Non viene cioè considerato il fatto che il generatore al quale si chiede di adattare il carico finale ha, a sua volta, una resistenza di uscita  $R_{outg}$ . Il  $Q$  della risonanza, come visto dal generatore (v. Fig. 1.5), è quindi la metà di  $Q_{tot}$  (poiché  $R_{in0} = R_{outg}$ ) e viene detto fattore di merito caricato (loaded). Conseguentemente la BW della risonanza raddoppia.

### 3.3 Circuito antirisonante con presa centrale sul ramo induttivo

Si consideri lo schema di Fig. 3.4.a.

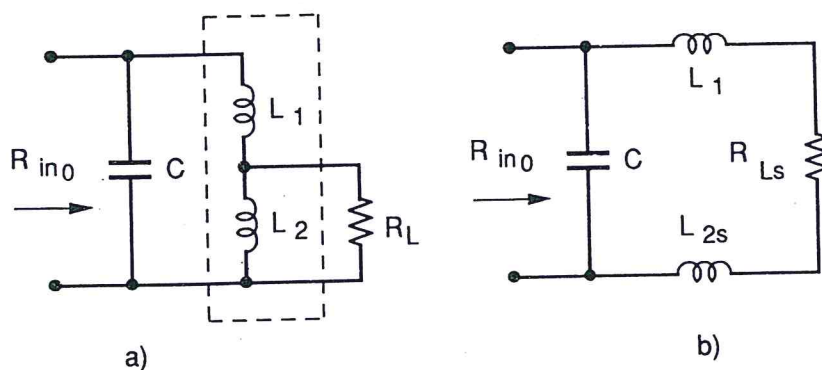


Fig. 3.4

Con una trasformazione parallelo-serie si può passare allo schema di Fig. 3.4.b (analoga alla Fig. 3.1.a), nella quale, posto:

$$Q_{L_2} = \frac{R_L}{\omega L_2}$$

si ha, dalla Tab. 3.1:

$$L_{2s} = \frac{L_2 Q_{L_2}^2}{1 + Q_{L_2}^2} \quad (3.13)$$

$$R_{Ls} = \frac{R_L}{1 + Q_{L_2}^2} \quad (3.14)$$

$$L = L_1 + L_{2s} \quad (3.15)$$

$$R_{in0} = R_{Ls} (1 + Q_L^2) = R_L \frac{1 + Q_L^2}{1 + Q_{L_2}^2} \quad (3.16)$$

Dalla (3.16), poiché il rapporto di trasformazione, la frequenza centrale e la BW sono noti, mediante la (3.4) si ottiene una prima valutazione di  $Q_{L_2}$  per decidere se usare o meno le formule approssimate:

$$Q_{tot} \cong Q_L \cong \sqrt{\frac{R_{in0}}{R_L}} Q_{L_2} \cong \frac{f_0}{BW} \quad (3.17)$$

Se le approssimazioni sono possibili si ottiene il circuito equivalente di Fig. 3.4.c.

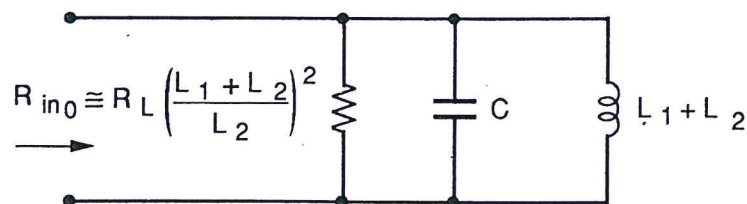


Fig. 3.4.c



**Esempio 3.3** Si ripeta l'Esempio 3.2 usando gli schemi di Fig. 3.4. Si ha:

$$Q_{\text{tot}} = 15$$

$$L = \frac{R_{\text{in}0}}{\omega_0 Q_{\text{tot}}} = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \pi 3 \cdot 10^6 \cdot 15} = 14 \mu\text{H}$$

$$C = \frac{1}{(2 \pi 3 \cdot 10^6)^2 \cdot 14 \cdot 10^{-6}} \cong 200 \text{ pF}$$

$$Q_{L2} \cong \frac{15}{\sqrt{80}} = 1.7$$

Si devono quindi usare le relazioni complete e perciò:

$$Q_{L2}^2 = (1 + Q_{\text{tot}}^2) \frac{1}{R_{\text{in}0}/R_L} - 1 = 1.8$$

$$Q_{L2} = 1.34$$

$$L_2 = \frac{50}{2 \pi 3 \cdot 10^6 \cdot 1.34} = 2 \mu\text{H}$$

$$L_{2s} = 2 \frac{1.8}{1 + 1.8} = 1.3 \mu\text{H}$$

$$L_1 = 14 - 1.3 = 12.7 \mu\text{H}$$

$$R_{Ls} = \frac{50}{1 + 1.8} = 17.9 \Omega$$

Per verifica:

$$R_{\text{in}0} \cong 17.9 \cdot 15^2 = 4027$$

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{14 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^{-12}} =$$

$$= 3.6 \cdot 10^{14} \gg \frac{R_{Ls}^2}{L^2} = \frac{(17.9)^2}{(14 \cdot 10^{-6})^2} = 1.6 \cdot 10^{12}$$

$$Q_{\text{tot}} = Q_L = \frac{2 \pi \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 10^{-6}}{17.9} = 14.7$$

Anche in questo caso il rapporto di trasformazione e la BW dell'adattamento si sono fissati indipendentemente l'uno dall'altro e valgono le considerazioni riguardo al Q caricato e non caricato.

La situazione presentata in Fig. 3.4 non è del tutto realistica poiché è plausibile che ci sia una mutua induzione  $M = k \sqrt{L_1 L_2}$  tra  $L_1$  e  $L_2$ .

In questo caso, si ha una struttura ad autotrasformatore mostrata nella Fig. 3.4.d, per la quale si può scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_1 = j \omega (L_1 + L_2) \mathbf{I}_1 + j \omega M (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) + j \omega M \mathbf{I}_1 + j \omega L_2 \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 = j \omega L_2 (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) + j \omega M \mathbf{I}_1 = - \mathbf{I}_2 R_L \end{cases} \quad (3.18)$$

che, riordinato e risolto, fornisce:

$$\begin{aligned} Z_{\text{in}}(\omega) &= j \omega (L_1 + L_2 + 2M) + \frac{\omega^2 (L_2 + M)^2}{R_L^2 + \omega^2 L_2^2} (R_L - j \omega L_2) = \\ &= j \omega L + (R_L - j \omega L_2) \frac{(L_2 + M)^2}{L_2^2} \frac{1}{1 + Q_{L2}^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

dove  $L = L_1 + L_2 + 2M$  e  $Q_{L2} = R_L / \omega L_2$ .

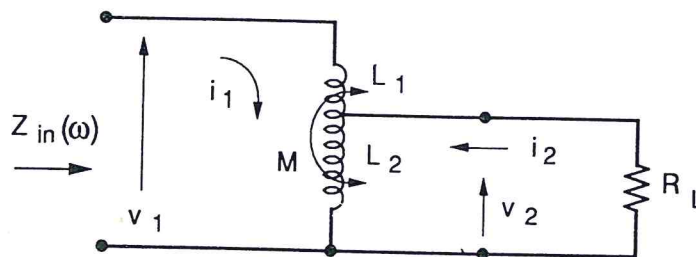


Fig. 3.4.d

Il fattore  $[(L_2 + M)/L_2]^2$  è pari a:

$$\left[ (N_1 \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} + N_2) / N_2 \right]^2 = N^2$$

poiché le induttanze sono proporzionali al numero delle spire al quadrato e si è assunto  $k \cong 1$ , tra  $L_1$  e  $L_2$ (\*). In definitiva si ha:

$$\begin{aligned} Z_{in}(\omega) &= j\omega L + (R_L - j\omega L_2) N^2 \frac{1}{1 + Q_{L_2}^2} = \\ &= j\omega L \frac{Q_{L_2}^2}{1 + Q_{L_2}^2} + R_L N^2 \frac{1}{1 + Q_{L_2}^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Se  $Q_{L_2} \rightarrow 0$  si ritrova il risultato proprio dei trasformatori in ferro per bassa frequenza, cioè in ingresso si vede una induttanza che tende a zero in serie a una resistenza data dal secondo termine della (3.20). In questo caso non si ottiene selettività della rete.

Se, invece,  $Q_{L_2}$  ha i valori che si incontrano nelle applicazioni a radiofrequenza, si ottiene:

$$Z_{in}(\omega) \cong j\omega L + R_L N^2 \frac{1}{Q_{L_2}^2} \quad (3.21)$$

che permette una selettività governata da un fattore di merito non caricato pari a:

$$Q_{tot} \cong \frac{\omega L}{R_L N^2} Q_{L_2}^2 = Q_{L_2} \quad (3.22)$$

poiché  $L = L_2 N^2$ .

L'impedenza di ingresso è quindi equivalente al parallelo tra una  $L = L_1 + L_2 + 2M$  e una  $R_{in0}$  data da:

(\*) Esiste un valore di  $k$  ( $k^*$ ) che rende  $M$  maggiore della più piccola tra  $L_1$  e  $L_2$ : valori maggiori di  $k^*$  denotano un accoppiamento stretto fra i due circuiti magnetici, mentre valori minori di  $k^*$  caratterizzano un accoppiamento lasco.

Si noti, inoltre, che raramente il rapporto tra le lunghezze  $l_1$  e  $l_2$  è molto diverso da 1. E' frequente incontrare relazioni nelle quali  $N$  non tiene conto di tale correzione.

$$R_{in0} \cong R_L N^2 \frac{1}{Q_{L2}^2} Q_{tot}^2 \cong R_L N^2 \quad (3.23)$$

*Commenti:*

- non sembra esserci differenza tra i risultati dati dagli schemi delle Figg. 3.2 e 3.4. In pratica, però, giocano anche criteri di scelta che fanno riferimento alla comodità, primo fra tutti il fatto di dover adattare un carico che abbia in parallelo un ramo capacitivo, con il che si userà più facilmente lo schema di Fig. 3.2, o induttivo, che consiglierà quello di Fig. 3.4. Inoltre, la possibilità di far scorrere con continuità la connessione centrale lungo la bobina di Fig. 3.4, può far preferire questo schema, specialmente alle più alte frequenze ( $k \cong 0$ );
- se il generatore al quale va adattato il carico presenta una componente reattiva in parallelo alla sua resistenza, questa deve essere inglobata nelle reattanze della rete adattatrice per essere cancellata dal meccanismo della risonanza e garantire così adattamento e massimo trasferimento di potenza allo stesso tempo;
- l'aver pensato il carico a destra e il generatore a sinistra delle reti adattatrici era, ovviamente, una posizione per fissare le idee: le reti sono passive, quindi reciproche, e i due elementi possono essere tranquillamente scambiati di posto;
- ci si rende facilmente conto dell'importanza di una buona simulazione del comportamento della rete adattatrice sulla BW desiderata.

Infine, nel caso ci sia una reattanza in parallelo a  $R_L$ , essa può essere o inglobata nella rete adattatrice o trasformata all'ingresso sostituendo a  $R_L$  una  $Z_L$  nelle formule relative e ottenendo quindi una  $Z_{in0}$ .

### **3.4 Trasformatori risonanti**

L'uso di trasformatori per ottenere l'adattamento è molto comodo, perché:

- isola il circuito del primario da quello del secondario;
- permette di ottenere un'inversione di fase.

Il progetto si esegue analogamente a quanto fatto per le maglie a presa centrale: dati  $R_{in0}$ ,  $R_L$ ,  $f_0$  e  $BW$  si devono determinare le induttanze del primario  $L_{pr}$  e del secondario  $L_{sec}$ , il coefficiente di accoppiamento  $k$  e le capacità di accordo. In merito a queste ultime si possono avere i due casi di accordo su un solo avvolgimento o su ambedue, che saranno trattati separatamente.

### 3.4.a Trasformatore con primario accordato

Lo schema è presentato nella Fig. 3.5.

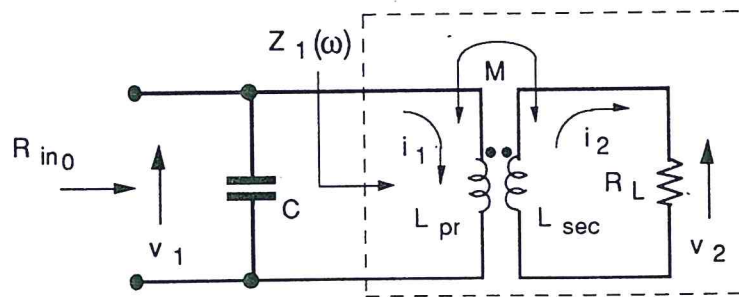


Fig. 3.5

Considerando, per il momento, il solo trasformatore caricato, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} V_1 &= j \omega L_{pr} I_1 - j \omega M I_2 \\ V_2 &= j \omega M I_1 - j \omega L_{sec} I_2 = I_2 R_L \end{aligned} \quad (3.24)$$

dalla quale ricaviamo l'impedenza di ingresso della sola parte contenuta nel rettangolo tratteggiato:

$$Z_1(\omega) = j \omega L_{pr} + \frac{\omega^2 M^2}{R_L + j \omega L_{sec}} \quad (3.25)$$

Moltiplicando  $M$  per un fattore qualunque  $\alpha \neq 0$  e l'impedenza di maglia del secondario per  $\alpha^2$ , la (3.25) e quindi la corrente

primaria non cambiano di valore. Del resto, è noto che le (3.24) possono essere ricavate dalla rete induttiva di Fig. 3.6<sup>(\*)</sup>.

Dal primario si vedrà quindi una rete equivalente, mostrata in Fig. 3.7.a che può essere convertita in quella di Fig. 3.7.b scegliendo  $\alpha = M/L_{\text{sec}}$ .

Ci si è riportati al caso di Fig. 3.4, per cui valgono le relazioni:

$$Q_{L_2} = \frac{R'_L}{\omega L_2} = \frac{(M^2/L_{\text{sec}}^2) R_L}{\omega k^2 L_{\text{pr}}} = \frac{R_L}{\omega L_{\text{sec}}} \quad (3.26)$$

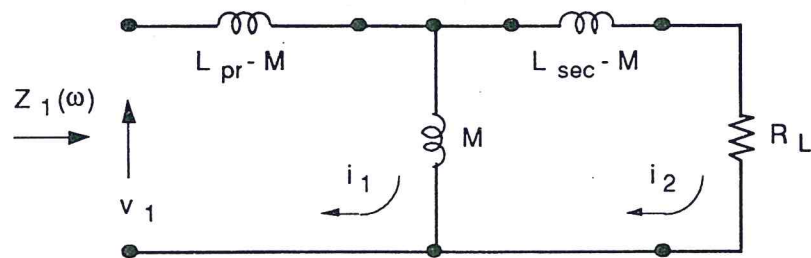


Fig. 3.6

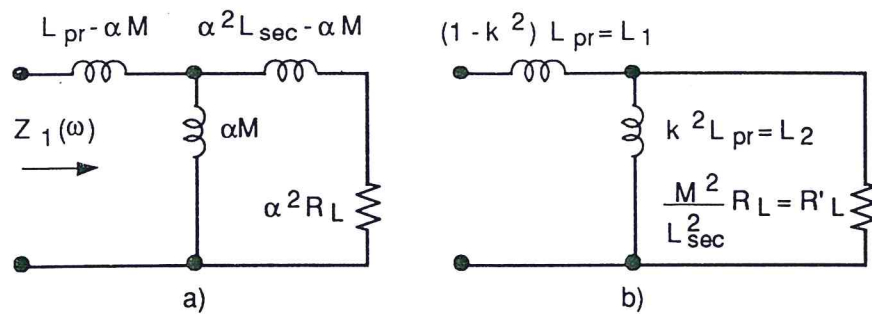


Fig. 3.7

<sup>(\*)</sup> Spesso lo schema di Fig. 3.6 si trova con  $R_L$  accoppiato alla rete tramite un trasformatore ideale 1:1 che non cambia le (3.24) e (3.25), ma descrive l'isolamento del primario dal secondario ed una eventuale inversione di fase.

$$L_{2s} = k^2 L_{pr} \frac{Q_{L_2}^2}{1 + Q_{L_2}^2} \quad (3.27)$$

$$R_{Ls} = \frac{(M^2/L_{sec}^2) R_L}{1 + Q_{L_2}^2} \quad (3.28)$$

$$L = L_1 + L_{2s} = (1 - k^2) L_{pr} + k^2 L_{pr} \frac{Q_{L_2}^2}{1 + Q_{L_2}^2} = L_{pr} \frac{1 + Q_{L_2}^2 - k^2}{1 + Q_{L_2}^2} \quad (3.29)$$

$$R_{in0} = R_{Ls} (1 + Q_{L_2}^2) = R_L \frac{(M^2/L_{sec}^2)(1 + Q_{L_2}^2)}{1 + Q_{L_2}^2} \quad (3.30)$$

$$Q_{tot} \cong Q_L = \frac{R_{in0}}{\omega L} = \frac{f_0}{BW} \quad (3.31)$$

Avendo a disposizione le stesse equazioni del caso richiamato [le (3.26)-(3.31) sono in tutto analoghe alle (3.13)-(3.17)], ma avendo introdotto la nuova incognita  $k^*$ , non siamo in grado di risolvere il problema, a meno che una delle incognite non sia fissata a priori.

Così facendo si può però correre il rischio di ottenere soluzioni complesse. Infatti, dalla (3.30) si ha:

$$Q_{L_2}^2 = \frac{(1 + Q_L^2) M^2}{R_{in0} / R_L L_{sec}^2} - 1$$

che per  $k \rightarrow 0$  fornisce un valore immaginario per  $Q_{L_2}$ .

---

(\*) Si noti che, se  $Q_{L_2} \ll 1$  e  $k \rightarrow 1$ , come avviene in un trasformatore di alimentazione per la presenza del ferro,  $L \rightarrow 0$  e  $R_{in0} \rightarrow R_L L_{pr} / L_{sec} =$

$R_L N_1^2 / N_2^2$ . Si riottiene cioè un risultato noto e la (3.31) perde significato poiché la risonanza ha una BW che tende ad infinito. Se quindi  $R_L$  è la resistenza di ingresso di uno stadio a BJT, può avvenire che la selettività della rete di ingresso sia molto scarsa; si dovrà contare sulla selettività della rete di adattamento di uscita. Se, al contrario,

$Q_{L_2} \gg 1$  e sempre  $k \rightarrow 1$ , allora  $L \rightarrow L_{pr}$ ,  $R_{in0} = R_L N_1^2 / N_2^2$  e in questo caso la selettività è possibile.

Si può mostrare, ma non si entrerà in tale dettaglio, che, una volta fissato  $Q_{\text{tot}} > 10$ , è determinato il valore minimo che possono assumere  $k$  e  $Q_{L_2}$ :

$$k_{\min} \cong \sqrt{\frac{2}{Q_{\text{tot}}}}$$

$$Q_{L_2\min} \cong 1 \quad (3.32)$$

**Esempio 3.4** Sia  $R_{\text{in}0} = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_L = 50 \Omega$ ,  $f_0 = 3 \text{ MHz}$  e  $BW = 200 \text{ kHz}$ . Si ha:

$$Q_{\text{tot}} = 15$$

$$L = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \pi \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 15} = 14 \mu\text{H}$$

$$C \cong 200 \text{ pF}$$

$$Q_{L_2} = 3 \text{ (*)}$$

$$k_{\min} = 0.37$$

$$L_{\text{sec}} = \frac{50}{2 \pi \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 3} = 0.9 \mu\text{H}$$

Dalla (3.30):

$$\frac{M^2}{L_{\text{sec}}^2} = \frac{R_{\text{in}0}}{R_L} \frac{1 + Q_{L_2}^2}{1 + Q_L^2} = \frac{4 \cdot 10^3}{50} \frac{1 + 9}{1 + 225} = 3.5 = \frac{k^2 L_{\text{pr}} L_{\text{sec}}}{L_{\text{sec}}^2} = k^2 \frac{L_{\text{pr}}}{L_{\text{sec}}}$$

$$k^2 L_{\text{pr}} = 3.5 L_{\text{sec}} = 3.5 \cdot 0.9 \cdot 10^{-6} = 3.15 \cdot 10^{-6}$$

e, dalla (3.29):

---

(\*) Questa posizione è una scelta. Si noti che valori troppo piccoli di  $Q_{L_2}$  danno valori di  $L_{\text{sec}}$  che possono corrispondere a poche spire o addirittura ad una frazione di spira, specialmente per induttori avvolti su ferrite. La nota precedente chiarisce il perché di un  $Q_{L_2\min}$  una volta fissato il  $Q_{\text{tot}}$  che si vuole ottenere.



$$14 \mu\text{H} = L_{\text{pr}} - \frac{k^2 L_{\text{pr}}}{1 + Q_{L_2}^2} = L_{\text{pr}} - \frac{3.15 \cdot 10^{-6}}{1 + 9}$$

$$L_{\text{pr}} = 14 \cdot 10^{-6} + 3.15 \cdot 10^{-7} = 14.3 \mu\text{H}$$

$$k = \sqrt{\frac{3.15 \cdot 10^{-6}}{14.3 \cdot 10^{-6}}} = 0.47 > k_{\text{min}}$$

Per verifica:

$$R_{Ls} = \frac{3.5 \cdot 50}{1 + 9} = 17.5 \Omega$$

$$R_{\text{in}0} = 17.5 (1 + 225) = 3955 \Omega$$

### 3.4.b Trasformatore con primario e secondario accordati

Lo schema è presentato nella Fig. 3.8.a, dove si è pensato che un generatore di corrente, con resistenza di uscita  $R_S$ , debba essere adattato al carico  $R_L$ .

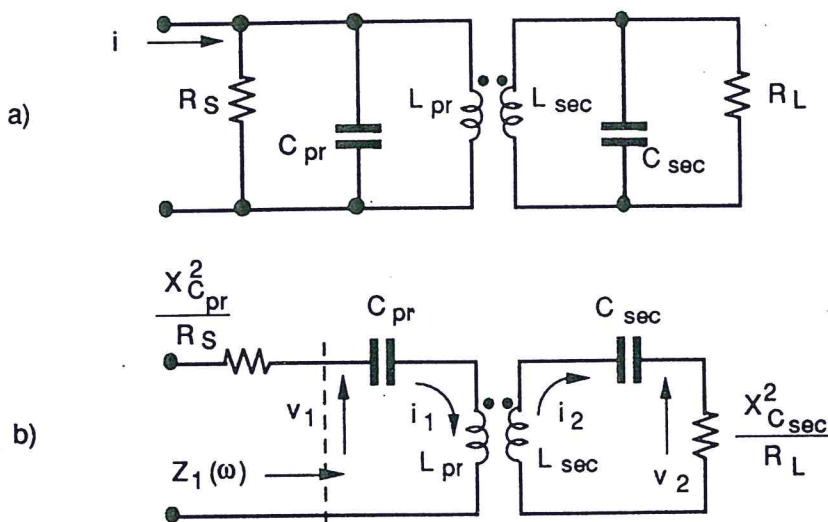


Fig. 3.8

Dall'analisi svolta al punto 3.4.a si ricava che, se  $Q_{L2} = Q_{Lsec} \gg 1$ , allora  $L \equiv L_{pr}$  e, per la reciprocità della rete, se  $Q_{L1} = Q_{Lpr} \gg 1$ ,  $L_{out} \equiv L_{sec}$ .

Accordare sulla stessa frequenza primario e secondario significa quindi accordare, rispettivamente con  $C_{pr}$  e  $C_{sec}$ , le induttanze  $L_{pr}$  e  $L_{sec}$ . Il che assicura che anche  $Q_{Cpr}$  e  $Q_{Csec}$  sono molto maggiori di uno.

Se le ipotesi fatte sono verificate, cosa tanto più agevole quanto più  $R_L$  è grande, l'analisi può essere svolta senza eccessive complicazioni formali, passando allo schema equivalente di Fig. 3.8.b, dove con  $X_C$  si è indicata la reattanza della capacità  $C$ .

Si avrà quindi:

$$\begin{cases} V_1 = \left( j\omega L_{pr} + \frac{1}{j\omega C_{pr}} \right) I_1 - j\omega M I_2 \\ V_2 \frac{X_{C_{sec}}^2}{R_L} = j\omega M I_1 - \left( j\omega L_{sec} + \frac{1}{j\omega C_{sec}} \right) I_2 \end{cases}$$

Alla risonanza si ha:

$$\begin{cases} V_1 = -j\omega M I_2 \\ I_2 = j\omega M \frac{R_L}{X_{C_{sec}}^2} I_1 \end{cases}$$

e cioè:

$$Z_1(\omega_0) = \omega^4 M^2 C_{sec}^2 R_L = k^2 R_L \frac{N_{pr}^2}{N_{sec}^2}$$

dove  $N$  indica il numero delle spire.

Per avere il massimo trasferimento di potenza si dovrà imporre:

$$Z_1(\omega_0) = \frac{X_{C_{pr}}^2}{R_S}$$

che, dopo qualche passaggio, fornisce:

$$k_{cr} = \frac{1}{\sqrt{Q_{sec} Q_{pr}}} \quad (3.34)$$

cioè il valore di  $k$  che garantisce l'adattamento. In questa situazione si ha:

$$BW = \frac{2 \sqrt{2} f_0}{Q_{\text{sec}} + Q_{\text{pr}}} \quad (3.35)$$

**Esempio 3.5** Si abbia una  $R_L = 300 \Omega$  ed una  $R_S = 500 \Omega$  e si voglia realizzare il massimo trasferimento di potenza a 3 MHz usando due induttanze uguali, componenti un trasformatore con primario e secondario accordati e con una  $BW = 150 \text{ kHz}$ . Si ha:

$$Q_{\text{tot}} = 20 = Q_{\text{pr}}$$

$$L_{\text{pr}} = \frac{500}{2 \pi 3 \cdot 10^6 20} = 1.3 \mu\text{H} = L_{\text{sec}}$$

$$Q_{\text{sec}} = \frac{300}{2 \pi 3 \cdot 10^6 1.3 \cdot 10^{-6}} = 12.2$$

$$C_{\text{pr}} = C_{\text{sec}} = \frac{1}{4 \pi^2 9 \cdot 10^{12} 1.3 \cdot 10^{-6}} = 2.1 \text{ nF}$$

$$k_{\text{cr}} = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 12.2}} = 0.06$$

*Commenti:*

- è bene ribadire che, nel caso trattato, i risultati sono soggetti all'ipotesi di avere  $Q$  grandi sia al primario che al secondario, quindi valori di  $R_S$  e  $R_L$  non eccessivamente bassi;
- le tecniche che richiedono di realizzare valori di  $k$  sensibilmente diversi da zero e da uno non sono di semplice esecuzione. Si deve avere un qualche metodo per misurare il valore di  $k$  realmente realizzato con la geometria e i materiali del montaggio messo in opera;
- studiare come varia la curva di risonanza al variare di  $k$  è solo questione di eseguire calcoli algebrici. Senza entrare in dettagli possiamo commentare il grafico qualitativo di Fig. 3.9. Per  $k < k_{\text{cr}}$  il trasferimento di potenza al

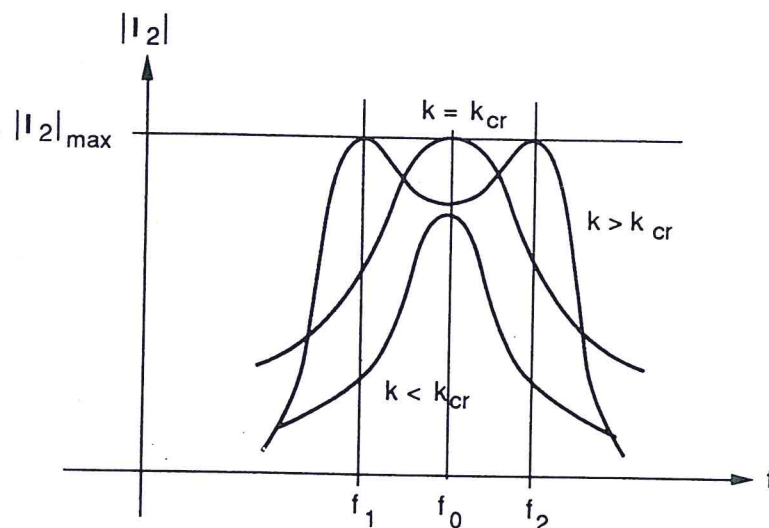


Fig. 3.9

secondario impoverisce e una tale condizione dovrebbe essere evitata. Per  $k > k_{cr}$  la curva di risonanza mostra due picchi al valore  $|I_2|_{max}$  e un minimo a  $f_0$ . Una tale situazione può invece essere interessante: per valori di  $k$  non troppo più grandi di  $k_{cr}$ , il minimo non scende molto e l'adattamento risulta abbastanza piatto per la banda di frequenze:

$$BW = f_2 - f_1 = [k^2 (Q_{pr} + Q_{sec})^2 - 1]^{1/2} \frac{f_0}{Q_{pr} + Q_{sec}}$$

(3.35')

compresa tra i due massimi. Si può anche vedere che, in questo caso, l'attenuazione fuori banda è maggiore che nel caso di  $k_{cr}$ . Una misura o una simulazione varranno a fornire indicazioni in materia;

- a proposito della Fig. 3.9 si può notare che si ritrova un risultato noto dalla meccanica quantistica: accoppiare due circuiti oscillanti significa far interagire due sistemi che tendono a disporsi, separatamente, in una determinata situazione energetica (autostato dell'energia  $\hbar\omega$ ). Il sistema complessivo non può prevedere due autostati dell'energia identici per il principio di Pauli e quindi, oltre  $k_{cr}$ , le due frequenze di risonanza si divaricano;
- la preferenza per lo schema di Fig. 3.5 o per quello di Fig. 3.8 è questione che dipende dall'applicazione: a volte fa comodo sfruttare il relativamente buon comportamento

passa banda (Fig. 3.9) del secondo schema per  $k > k_{cr}$ , oppure si è forzati a usare il secondo schema per la presenza di un ramo capacitivo non trascurabile in parallelo a  $R_L$ .

### 3.4.c Trasformatore accordato e con presa centrale

Si incontra a volte una struttura adattatrice come quella mostrata in Fig. 3.10.a: un esempio varrà ad illustrarne il comportamento.

**Esempio 3.6** Si consideri lo schema di Fig. 3.10.b nel quale un transistor è usato per amplificare un segnale a frequenza  $f_0 = 265$  kHz.

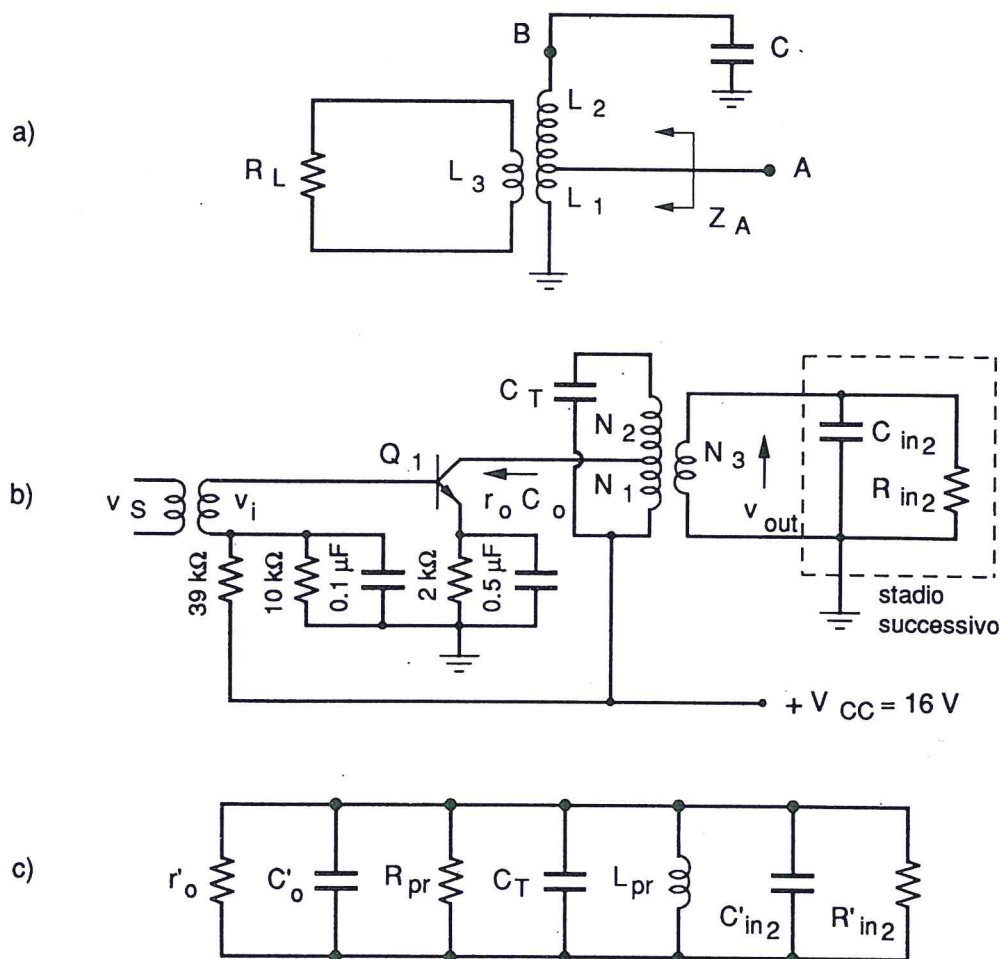


Fig. 3.10

Le caratteristiche del transistor sono:  $\beta = 50$ ,  $r_o = 20 \text{ kHz}$ ,  $C_o = 20 \text{ pF}$ ,  $f_T = 30 \text{ MHz}$ , mentre quelle del trasformatore sono:

$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} = 4$$

$$\frac{N_1 + N_2}{N_3} = 12$$

$$k_{12} \cong k_{13} \cong k_{23} \cong 1$$

ed è:  $C_T = 300 \text{ pF}$ ,  $L_{pr} = 1.2 \text{ mH}$ ,  $Q_{pr} = 100$ ,  $C_{in2} = 10 \text{ pF}$  e  $R_{in2} = 625 \Omega$ . Le due ultime grandezze modellano l'ingresso dello stadio successivo.

Si noterà che lo stadio è accordato solo in uscita per le ragioni commentate nella nota alle relazioni (3.26-3.31).

Dal valore di  $L_{pr}$  e dal rapporto spire si ricava che:

$$L_1 = L_{pr} \frac{N_1^2}{(N_1 + N_2)^2} = \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{16} = 75 \mu\text{H}$$

$$Q_{L1} = \frac{20 \cdot 10^3}{2 \pi 265 \cdot 10^3 \cdot 75 \cdot 10^{-6}} = 160$$

$$L_3 = L_{sec} = L_{pr} \frac{N_3^2}{(N_1 + N_2)^2} = \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{144} = 8 \mu\text{H}$$

$$Q_{L3} = \frac{625}{2 \pi 265 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 47$$

E' quindi possibile usare le approssimazioni per  $Q \gg 1$ . Ciò porta a concludere che intorno a  $L_{pr}$  si avrà la maglia di Fig. 3.10.c nella quale:

$$r'_o = r_o \cdot 16 = 320 \text{ k}\Omega$$

$$C'_o = C_o/16 = 1.25 \text{ pF}$$

$$R_{pr} = Q_{pr} 2 \pi 265 \cdot 10^3 \cdot 1.2 \cdot 10^{-3} = 200 \text{ k}\Omega$$

$$C'_{in2} = C_{in2}/144 = 0.069 \text{ pF}$$

$$R'_{in2} = R_{in2} \cdot 144 = 90 \text{ k}\Omega$$

Quindi in parallelo al primario avremo una  $C_{tot} \cong 301 \text{ pF}$  ed una  $R_{tot} = 52 \text{ k}\Omega$  che abbassa il  $Q$  non caricato (Unloaded) della bobina al valore del  $Q$  caricato (Loaded):

$$Q_{prL} = \frac{Q_{prU}}{R_{pr}^+} R_{tot} = 26$$

La BW della risonanza sarà quindi pari a 10.2 kHz, tipica di una trasmissione AM.

Si noti che, grazie all'azione dei trasformatori, le capacità riportate al primario non hanno mutato sostanzialmente il valore di  $C_T$ , che è stato fissato in maniera da risuonare a 265 kHz con  $L_{pr}$ .

Si noti ancora che, dato il valore della frequenza di lavoro e della  $f_T$ , si è considerato trascurabile il contributo di  $C_\mu$ , ragione per la quale, essendo disaccoppiati ingresso e uscita, questa è stata rappresentata solo dal parallelo  $r_o // C_o$ . Se si vuole il valore dell'amplificazione di tensione  $v_{out}/v_i$  si può procedere come segue, poiché  $f_\beta = f_T/\beta = 600 \text{ kHz}$  è maggiore di  $f_0$ . Si ha:

$$A_v = \frac{V_{ce}}{V_{be}} \approx \frac{1}{12} = -g_m R_L \approx \frac{1}{12} = -g_m \frac{R_{tot}}{16} \approx \frac{1}{12} = -54$$

sulla BW di circa 10 kHz intorno a 265 kHz.

### 3.5 Attenuazione e perdita di inserzione

La funzione della rete adattatrice può essere descritta dallo schema di Fig. 3.11.

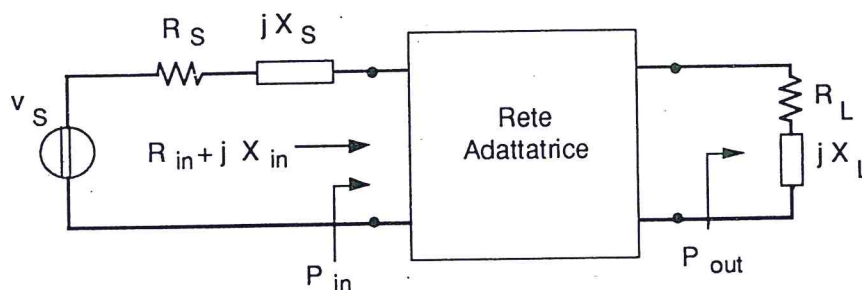


Fig. 3.11

Se la rete è formata di sole reattanze la potenza consegnata al carico deve essere pari alla potenza che entra nella rete, cioè:

$$P_{out} = P_{in} = \frac{|V_S|^2 R_{in}}{(R_S + R_{in})^2 + (X_S + X_{in})^2} \quad (3.36)$$

Si definisce attenuazione (Attn) il rapporto in dB tra le (3.36) e la potenza(\*) disponibile dal generatore, cioè:

$$\begin{aligned} \text{Attn} &= -10 \lg \frac{|V_S|^2 R_{in}}{(R_S + R_{in})^2 + (X_S + X_{in})^2} \frac{4 R_S}{|V_S|^2} = \\ &= -10 \lg \frac{4 R_S R_{in}}{(R_S + R_{in})^2 + (X_S + X_{in})^2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Si definisce perdita di inserzione (Insertion Loss = IL) il rapporto tra la (3.36) e la potenza consegnata al carico se esso fosse connesso direttamente al generatore:

$$\begin{aligned} \text{IL} &= -10 \lg \frac{|V_S|^2 R_{in}}{(R_S + R_{in})^2 + (X_S + X_{in})^2} \frac{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}{|V_S|^2 R_L} = \\ &= -10 \lg \frac{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}{R_L [(R_S + R_{in})^2 + (X_S + X_{in})^2]} \end{aligned} \quad (3.37')$$

La (3.37) assume valori solo positivi o, al minimo, nulli quando  $R_S = R_{in}$  e  $X_S = -X_{in}$ , ossia in condizioni di adattamento. Al contrario, IL può essere anche negativa, poiché ciò significa che la rete adatta meglio il carico al generatore.

---

(\*) Nelle (3.36) e (3.37), come in tutte le relazioni che esprimono la potenza, deve essere utilizzato il valore efficace della tensione. Per semplicità di notazione, molto spesso questo non sarà indicato. Ciò non cambia i risultati ottenuti quando si tratta di rapporti di potenza come nella (3.37).



### 3.6 Reti adattatrici a T e a $\pi$

Chiudiamo questo capitolo dando le relazioni che descrivono il comportamento adattatore delle reti a T e a  $\pi$ , molto utilizzate nell'adattamento tra antenna trasmittente e stadio finale di potenza.

*Rete adattatrice a T* - Si supponga di dover adattare una sorgente, rappresentabile con un gruppo  $R_1 C_1$  in serie, ad un carico  $R_L$  (v. Fig. 3.12).

Si potrà procedere come segue:

- 1) analogamente a quanto fatto per le altre reti di adattamento, fissare il Q e la frequenza di risonanza;

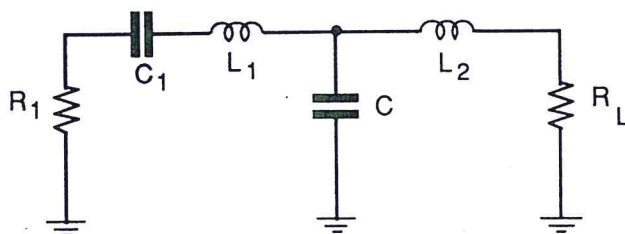


Fig. 3.12

- 2) calcolare  $A = R_1(1 + Q^2)$  e  $B = \sqrt{(A/R_L) - 1}$  ;
- 3) ottenere  $L_1$  da:

$$\omega_0 L_1 = R_1 Q + \frac{1}{\omega_0 C_1} \quad (3.38)$$

- 4) ottenere  $L_2$  da:

$$\omega_0 L_2 = B R_L \quad (3.39)$$

- 5) ottenere C da:

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{A}{B + Q} \quad (3.40)$$

*Rete adattatrice a  $\pi$*  - Si supponga di dover adattare una sorgente, rappresentabile con un gruppo  $R_1 C$  in parallelo, ad un carico  $R_L$  (v. Fig. 3.13).

Si potrà procedere come segue:

- 1) fissare il  $Q$  e la frequenza di risonanza;
- 2) calcolare:

$$\frac{1}{\omega_0 C_2} = \frac{R_1}{Q} \quad (3.41)$$

- 3) calcolare:

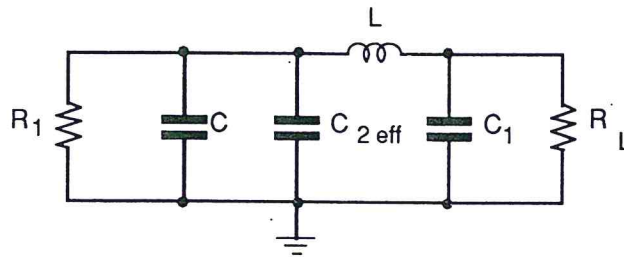


Fig. 3.13

$$\frac{1}{\omega_0 C_1} = R_L \sqrt{\frac{R_1/R_L}{(Q^2 + 1) - R_1/R_L}} \quad (3.42)$$

- 4) calcolare:

$$\omega_0 L = \frac{Q R_1 + R_1 R_L \omega_0 C_1}{Q^2 + 1} \quad (3.43)$$

Si noti che il valore  $C_2$  calcolato al punto 2 comprende anche quello di  $C$ , per cui il condensatore da saldare nella rete adattatrice avrà valore:

$$C_{2\text{eff}} = C_2 - C \quad (3.44)$$

Con questa rete è molto difficile adattare carichi con  $R_1 < R_L$ .