

## Capitolo 5

### L'anello ad aggancio di fase

#### 5.1 Introduzione

L'anello ad aggancio di fase (Phase Locked Loop = PLL) è un subsistema presente molto spesso negli apparati che provvedono alla trasmissione e alla ricezione di segnali e che richiedono un'operazione di sincronizzazione eseguita grazie a un'informazione contenuta esplicitamente o implicitamente nel segnale ricevuto.

Casi tipici sono, per esempio:

- ricezione di una stazione radio in modulazione di ampiezza. Si tratta di ricostruire, nel ricevitore, la frequenza della portante in modo da essere in grado di eseguire una demodulazione omodina e ricavare così il segnale in banda base;
- ricezione di una stazione radio in modulazione di frequenza. In questo caso la ricostruzione della frequenza di portante servirà a rivelare gli scostamenti di questa dalla frequenza del segnale, i quali rappresentano il messaggio. Quanto detto comprende anche il caso di modulazione FSK per la trasmissione di segnali codificati in binario;
- ricezione di un messaggio in banda base codificato in binario. In questo caso il segnale ha una struttura (frame) a pacchetto che prevede un sezionamento in campi, il primo dei quali è detto testa (head) e l'ultimo è detto coda (tail). Nella testa è esplicitamente contenuta l'informazione di sincronizzazione sotto forma di una stringa opportunamente(\*) lunga di bit tipo 101010 ...;
- produzione (sintesi) di una frequenza, a partire da quella generata da un oscillatore a quarzo, la quale presenti caratteristiche di stabilità e purezza spettrale analoghe a quelle del sub-standard.

---

(\*) Il significato di questa parola sarà chiarito in seguito.

## 5.2 Principio di funzionamento del PLL

Nella sua versione essenziale la struttura di un PLL comprende, come mostrato in Fig. 5.1, un rivelatore di differenza di fase (Phase Detector = PD), un oscillatore controllato in tensione (Voltage Controlled Oscillator = VCO) e un filtro passa basso (Low Pass Filter = LPF), la risposta impulsiva del quale chiameremo  $w(t)$ .

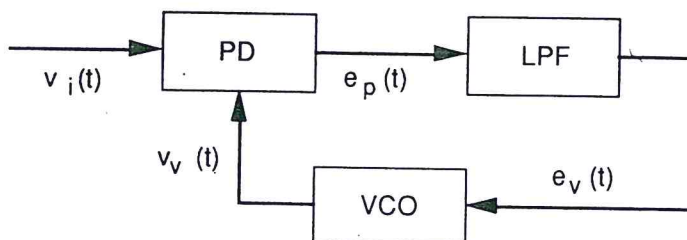


Fig. 5.1

Si consideri ora che  $v_i(t)$  e  $v_v(t)$  siano due segnali sinusoidali di pulsazione rispettivamente  $\omega_i$  e  $\omega_v$  e di fase relativa  $\phi_{vi}(0)$  al tempo  $t = 0$ .

La differenza di fase ad un tempo  $t$  generico può essere rappresentata come mostrato in Fig. 5.2 ove si è supposto che  $\omega_i$  sia maggiore di  $\omega_v$ .

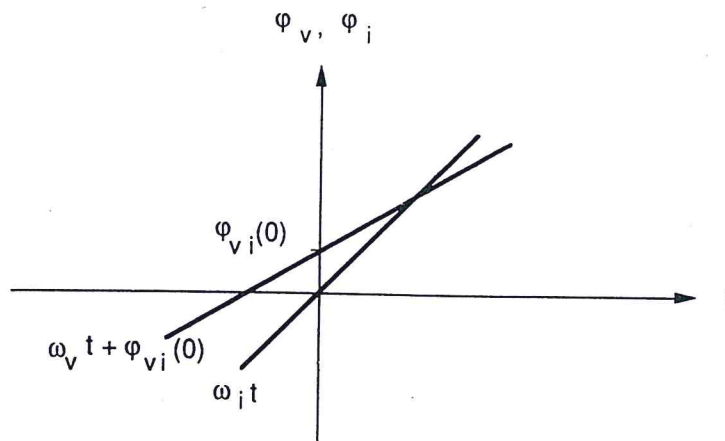


Fig. 5.2

Supponiamo di analizzare il PLL nell'intorno di un valore di  $|\phi_v - \phi_i|$  tale da giustificare un'analisi lineare. Si vedrà nel seguito che tale ipotesi è necessaria solo per permettere l'impostazione dei calcoli, ma non è limitante per il funzionamento dell'anello.

Sia dunque:

$$e_p(t) = k_p[\phi_i(t) - \phi_v(t)] \leftrightarrow E_p(s) = k_p[\phi_i(s) - \phi_v(s)] \quad (5.1)$$

$$e_v(t) = e_p(t) * w(t) \leftrightarrow E_v(s) = E_p(s) W(s) \quad (5.2)$$

$$\omega_v(t) = \omega_0 + k_v e_v(t) \quad (5.3)$$

dove  $\omega_0$  è la frequenza di oscillazione del VCO con tensione di pilotaggio nulla,  $k_p$  e  $k_v$  sono costanti strutturali, il simbolo  $\leftrightarrow$  denota una trasformazione alla Laplace e l'asterisco sta per "convoluzione tra" (v. par.3.2, Vol. 4).

Utilizzando come variabili di ingresso e di uscita rispettivamente la fase di  $v_i(t)$  e quella di  $v_v(t)$ , l'anello può essere rappresentato come mostrato in Fig. 5.3.

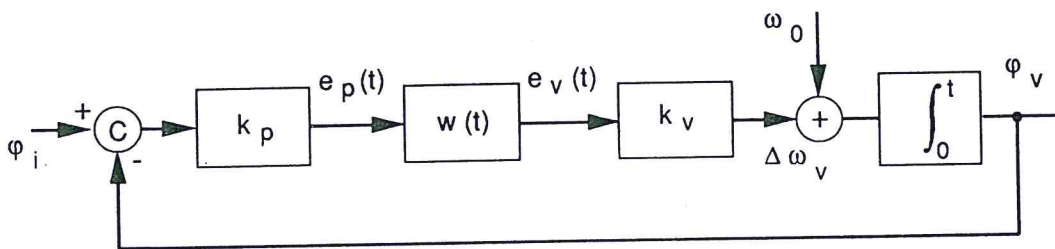


Fig. 5.3

Per studiarne il comportamento dinamico, si supponga di essere nella condizione in cui il PD dia segnale nullo. E' evidente che deve essere anche  $\omega_i = \omega_0$ ,  $e_v = 0$  e che l'anello è inattivo.

Supponiamo ora che la fase del segnale di ingresso abbia, rispetto alla sua condizione precedente, un piccolo scarto. Detto  $\phi_{i0}$  il suo valore di riposo e  $\phi_i(t)$  lo scarto, avremo:

$$\phi_{itot}(t) = \phi_{i0} + \phi_i(t)$$

Corrispondentemente:



$$\varphi_{vtot}(t) = \varphi_{v0} + \varphi_v(t) = \varphi_{i0} + \varphi_v(t)$$

Non dissimilmente da quanto si fa per l'analisi di un sistema linearizzato intorno ad un punto di lavoro, possiamo quindi scrivere:

$$\phi_v(s) = \frac{\Delta\Omega_v(s)}{s} = \frac{k_p k_v W(s)}{s} [\phi_i(s) - \phi_v(s)]$$

poiché è:

$$\Delta\Omega_v(s) = k_v E_v(s) = k_v W(s) E_p(s) = k_p k_v W(s) [\phi_i(s) - \phi_v(s)]$$

Si ottiene quindi:

$$\frac{\phi_v(s)}{\phi_i(s)} = \frac{\frac{k_p k_v W(s)}{s}}{1 + \frac{k_p k_v W(s)}{s}} = H(s)$$

$$\frac{\Delta\phi(s)}{\phi_i(s)} = \frac{\phi_i(s) - \phi_v(s)}{\phi_i(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k_p k_v W(s)}{s}} \quad (5.4)$$

Per  $k_p k_v \rightarrow \infty$  la funzione di trasferimento  $H(s)$  tende ad uno indicando che l'anello agisce sul VCO in modo da inseguire la fase del segnale di ingresso. Il prodotto  $T(s) = k_p k_v W(s)/s$  è detto guadagno d'anello.

Dalla seconda delle (5.4) si può ricavare l'errore a regime nel caso in cui l'ingresso abbia una brusca variazione di fase  $\Delta\phi_i$  o di frequenza  $\Delta\omega_i$ . Nel primo caso, schematizzando l'ingresso con un gradino di fase, si ottiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\phi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta\phi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s}{s + k_p k_v W(s)} \frac{\Delta\phi_i}{s} = 0 \quad (5.5)$$

qualunque sia la  $W(s)$ , purché sia di tipo passa-basso.

Nel caso si abbia uno scarto di frequenza in ingresso, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\phi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s}{s + k_p k_v W(s)} \frac{\Delta\omega_i}{s^2} = \frac{\Delta\omega_i}{k_p k_v W(0)} \quad (5.6)$$



come era da attendersi perché venissero rispettati i meccanismi di trascinamento del VCO. L'errore a regime in presenza di gradino di frequenza sarà dunque nullo solo se LPF ha un polo nell'origine.

In conclusione, quindi:

- se in ingresso si ha una sinusoide a frequenza  $\omega_0$ , il PLL si aggancia ad essa e, dopo un transitorio, riproduce in uscita al VCO una sinusoide identica;
- se in ingresso si ha una sinusoide a frequenza  $\omega_i \neq \omega_0$ , il PLL si aggancia ad essa e, dopo un transitorio, riproduce in uscita al VCO una sinusoide della stessa frequenza, ma con uno sfasamento costante rispetto all'ingresso, tanto più piccolo quanto più grande è il prodotto  $k_p k_v$ . L'errore si annulla se l'LPF ha un polo nell'origine;
- data la linearità dell'analisi, le conclusioni precedenti non cambiano se  $\Delta\phi_i$  e  $\Delta\omega_i$  sono presenti contemporaneamente;
- se in ingresso si ha un segnale in formato FM, cioè con frequenza istantanea data da:

$$\omega_i = \omega_0 + m_f x(t)$$

con  $m_f$  indice di modulazione e  $x(t)$  messaggio da rivelare, siamo nel caso in cui si ha:

$$\phi_i(t) = \int_0^t m_f x(t) dt \leftrightarrow m_f \frac{X(s)}{s}$$

Ricavando dalla (5.1) e dalla seconda delle (5.4) il valore di  $E_p(s) \leftrightarrow e_p(t)$ , si ottiene:

$$E_p(s) = \frac{k_p s}{s + k_p k_v W(s)} m_f \frac{X(s)}{s}$$

che, nella BW dell'LPF e nell'ipotesi che  $k_p k_v \gg 1$ , fornisce:

$$E_p(s) \cong \frac{1}{k_v W(0)} m_f X(s) \quad (5.7)$$

- La  $e_p(t)$  è quindi il risultato della demodulazione del segnale;
- se l'uscita del VCO viene scalata in frequenza di un fattore  $N$  (con un contatore modulo  $N$ ), il VCO è forzato, per mantenere il PLL in sincronismo, a fornire una frequenza pari a  $N\omega_i$ . E' questo il principio della sintesi di frequenza: se  $\omega_i$  è stabilizzata da un quarzo, tutte le frequenze generate al

variare di  $N$  hanno la stessa stabilità. La trattazione che segue non prevede la moltiplicazione, né la sintesi di frequenza e le relazioni che si daranno sono valide quindi solo se  $N = 1$ . In caso contrario si rimanda ai testi specializzati.

### 5.3 Effetto dei disturbi sulle prestazioni del PLL

In questo paragrafo tratteremo l'influenza che i disturbi hanno sul PLL, analizzando, molto succintamente, i due casi di rumore additivo e di tono interferente.

#### 5.3.a Rumore additivo

Si supponga che l'anello sia agganciato alla frequenza del segnale in ingresso e sia quindi  $\omega_i = \omega_v$  e che il segnale di ingresso sia affetto da rumore che supporremo a spettro bianco su banda  $B$  (v. Fig. 5.4) centrata intorno a  $\omega_i$ .

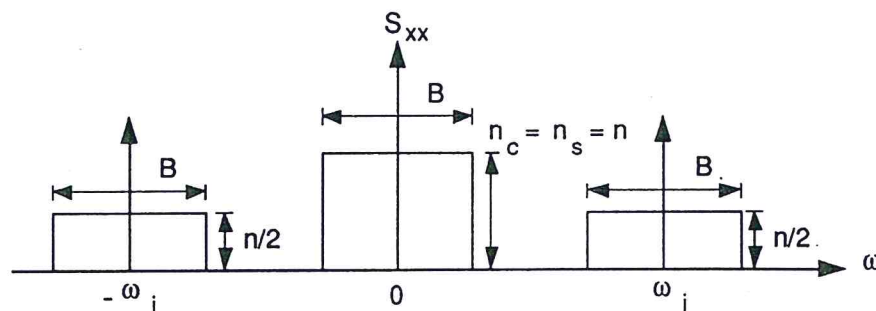


Fig. 5.4

Detta  $n/2$  la densità di potenza del rumore (in Fig. 5.4 si è usato uno spettro di potenza bilatero), le sue componenti analogiche di bassa frequenza estratte intorno a  $\omega_i$  hanno anch'esse spettro bianco, ma con densità di potenza  $n$ . Le fluttuazioni di fase del segnale in ingresso possono essere messe in relazione con il rapporto tra la potenza totale di rumore  $N = nB$  e quella del segnale  $S$ .

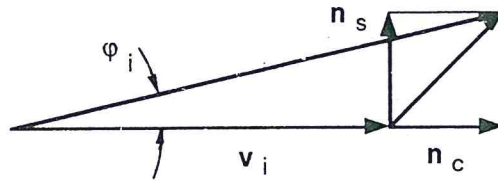


Fig. 5.4'

Questo, infatti, può essere pensato come un fasore ( $v$ , Fig. 5.4') al quale si sommano un altro fasore casuale in fase che ne muta in maniera trascurabile, se  $S/N \ll 1$ , l'ampiezza e un fasore in quadratura che provoca una fluttuazione della fase.

Dette  $n_c$  e  $n_s$  le componenti analogiche rispettivamente in fase e in quadratura, avremo:

$$\varphi_i(t) = \text{tg}^{-1} \frac{n_s(t)}{\hat{V}_i + n_c(t)} \cong \frac{n_s(t)}{\hat{V}_i}$$

dove con  $\varphi_i(t)$  si è indicata la variazione casuale di  $\varphi_i$  rispetto al suo valore atteso.

Per grandi rapporti  $S/N$  il processo  $\varphi_i(t)$  è bianco entro  $\pm B/2$  e la sua varianza si ottiene immediatamente:

$$\overline{\varphi_i^2(t)} = \frac{n B}{2 S} = \frac{N}{2 S} \quad (5.8)$$

Si genera, quindi, una modulazione della frequenza  $\omega_v$  il cui spettro può essere ricavato come segue. Dalla prima delle (5.4) si ha:

$$\Delta\Omega_v(s) = s \phi_v(s) = \frac{k_p k_v W(s)}{1 + \frac{k_p k_v W(s)}{s}} \phi_i(s)$$

e quindi(\*):

$$S_{\omega_v \omega_v}(\omega) = \frac{\omega^2 k_p^2 k_v^2 |W(j\omega)|^2}{|j\omega + k_p k_v W(j\omega)|^2} \frac{N}{2 S B} \quad (5.9)$$

(\*) La relazione (5.9), divisa per  $\omega^2$ , fornisce lo spettro  $S_{\phi_v \phi_v}(\omega)$ .



Per capire come vadano le cose, si deve specializzare il blocco LPF.

1. Assenza di LPF, cioè  $W(j\omega) = 1$ .

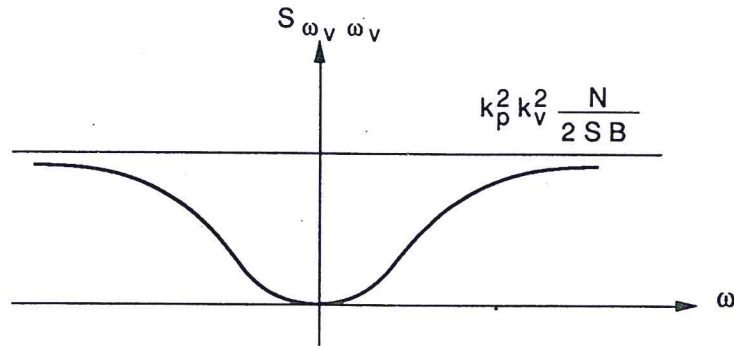


Fig. 5.5

Si ottiene:

$$S_{\omega_v \omega_v}(\omega) = \frac{\omega^2 k_p^2 k_v^2 \frac{N}{2 S B}}{k_p^2 k_v^2 + \omega^2} \quad (5.10)$$

che ha l'andamento mostrato in Fig. 5.5.

2. L'LPF è formato da una cella RC. Si ottiene:

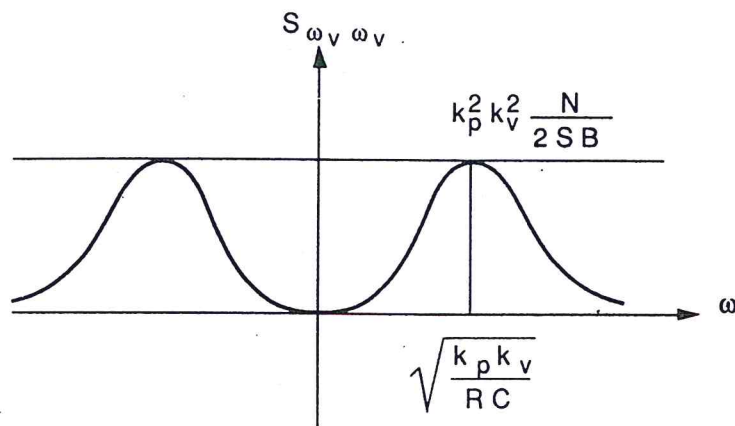


Fig. 5.6

$$S_{\omega_v \omega_v}(\omega) = \frac{\omega^2 k_p^2 k_v^2}{(k_p k_v - \omega^2 R C)^2 + \omega^2 2 S B} \frac{N}{2 S B} \quad (5.11)$$

che è mostrata in Fig. 5.6.

### 5.3.b Risposta ad un tono interferente

Si supponga che:

$$v_i(t) = A \cos \omega_i t + B \cos[(\omega_i + \Delta\omega) t + \theta]$$

con  $B \ll A$ .

Anche in questo caso il segnale di ingresso può essere rappresentato come un fasore di ampiezza  $A$  al quale si sommano un fasore in fase ed uno in quadratura che producono una variazione di fase istantanea pari a:

$$\phi_i(t) \cong \frac{B}{A} \text{sen}(\Delta\omega t + \theta)$$

Trasformando secondo Laplace otteniamo:

$$\phi_i(s) = \frac{B}{A} \frac{1}{s^2 + (\Delta\omega)^2} (\Delta\omega \cos \theta + s \text{sen} \theta)$$

Moltiplicando tale risultato per la prima delle (5.4) e supponendo che  $W(s)$  sia quella relativa alla cella RC utilizzata nel caso precedente, si può antitrasformare ottenendo:

$$\varphi_{v_{\text{regime}}}(t) = k_p k_v \frac{B}{A} \frac{\text{sen} \left[ \Delta\omega t + \theta - \text{tg}^{-1} \left( \frac{\Delta\omega}{k_p k_v - R C (\Delta\omega)^2} \right) \right]}{\sqrt{[k_p k_v - (\Delta\omega)^2 R C]^2 + (\Delta\omega)^2}} \quad (5.12)$$

ossia una modulazione della fase del VCO a regime. Il tono disturbante risulta tanto meno efficace quanto più è lontano in frequenza da  $\omega_i^{(*)}$ .

Per migliorare il rapporto S/N e per svincolarsi dalle fluttuazioni dell'ampiezza del segnale di ingresso spesso lo si limita prima del PD.

(\*) Un ulteriore commento sul risultato (5.12) verrà dato al par. 5.4.

Infatti, una sinusoide di frequenza  $f$  che passa per un limitatore ideale, che dia cioè un'uscita  $(+a)$  per  $v_{in} > 0$  e un'uscita  $(-a)$  per  $v_{in} < 0$ , fornisce una onda quadra di periodo  $1/f$ : la sua prima armonica ha ampiezza leggermente superiore ad  $a$  (precisamente  $4a/\pi$ ), mentre la terza armonica sta circa a  $-7$  dB rispetto ad  $a$ .

Se nel limitatore entrano due toni di cui uno molto minore dell'altro, il conto da eseguire si complica fortemente ed esula dagli scopi di quanto si va dicendo. La conclusione cui si giunge è che il limitatore lascia il tono più forte praticamente immutato, mentre attenua fortemente il più debole e tutti i prodotti di intermodulazione.

Per esempio, se dei due toni, distanti in frequenza dello  $0.1\%$ , quello disturbante ha ampiezza metà di quello desiderato, passando attraverso il limitatore si otterrà in uscita il secondo tono e le componenti armoniche attenuati perlomeno di  $10$  dB rispetto al livello del primo tono che passa indisturbato.

Anche nel caso di rumore additivo le conclusioni dipendono dal rapporto  $S/N$  in ingresso<sup>(\*)</sup>.

Per un limitatore ideale si ha un miglioramento di  $\pi/4$  per  $(S/N)_{in} \rightarrow 0$  e di  $2$  per  $(S/N)_{in} \rightarrow \infty$ .

Se il limitatore non è ideale il risultato è peggiore; utilizzando per il limitatore un modello del tipo:

$$v_{out}(t) = \begin{cases} a \sqrt{v_{in}(t)} & \forall v_{in}(t) > 0 \\ -a \sqrt{|v_{in}(t)|} & \forall v_{in}(t) < 0 \end{cases}$$

si ottiene un peggioramento ( $0.96$ ) per bassi rapporti segnale-rumore in ingresso e un miglioramento pari a  $1.8$  se il rapporto in ingresso tende ad infinito.

Si noti che i due limiti estremi di rapporto segnale-disturbo corrispondono rispettivamente al caso di segnale in ricezione di una catena di elaborazione e di segnale generato da un oscillatore locale: la loro considerazione ha quindi interesse, pur se in momenti differenti dall'applicazione in studio.

Nel caso di messaggio in banda base codificato in binario, il tratto della testa del frame devoluto alla sincronizzazione forza il PLL a oscillare alla frequenza di bit.

Nei campi del pacchetto che seguono, la componente a frequenza pari all'inverso del tempo di bit è sempre presente, più o meno attenuata, dipendendo questo dal tipo di codifica usata (NRZ, RZ, Manchester, etc.).

(\*) W.B. Davenport, Op. Cit.



La presenza del filtro passa basso, attenuando la rapidità dei cambiamenti, mantiene, se necessario, la sincronizzazione fino al frame seguente. La considerazione del rapporto esistente tra la lunghezza del tratto di sincronizzazione e la costante di tempo dell'LPF giustifica la nota al par. 5.1.

Quanto precede è parte molto importante del problema della generazione o della rivelazione di un segnale spettralmente puro e non sono certo le poche righe ad esso dedicate che possono esaurire le esigenze di approfondimento e di progetto. Il lettore interessato è rimandato ai testi specializzati elencati in bibliografia.

#### 5.4 Studio della stabilità del PLL

Lo studio della stabilità del PLL si esegue investigando la posizione dei poli della sua funzione di trasferimento (5.4), il che faremo col metodo del luogo delle radici.

- a) Nel caso che  $W(s) = 1$ , ossia che l'LPF sia assente, otteniamo che il guadagno di anello ha un polo nell'origine. All'aumentare del prodotto  $k_p k_v$  il polo di  $H(s)$  si sposta verso valori sempre più negativi, aumentando la rapidità con la quale si estinguono i transitori.
- b) Se  $W(s)$  è quella di una cella RC si ha:

$$T(s) = \frac{k_p k_v}{s} \frac{1}{1 + s RC}$$

Il luogo delle radici è quello mostrato in Fig. 5.7

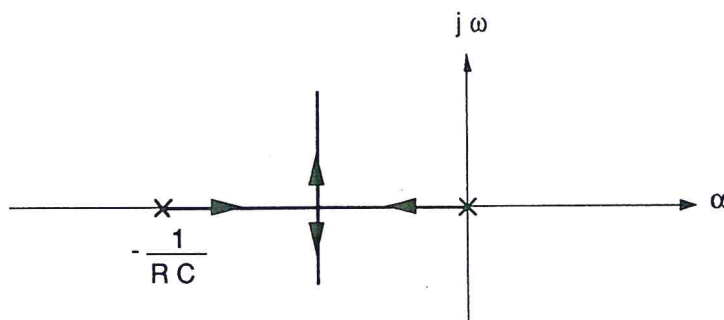


Fig. 5.7

L'anello rimane stabile, ma può raggiungere la sua situazione di equilibrio con andamento oscillante. Il denominatore della funzione di trasferimento  $H(s)$  presenta una frequenza di risonanza:

$$\omega_n = \sqrt{k_p k_v / (RC)}$$

e un fattore di smorzamento:

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{RC k_p k_v}}$$

c) Si supponga l'LPF formato da una rete come quella di Fig. 5.8.a.

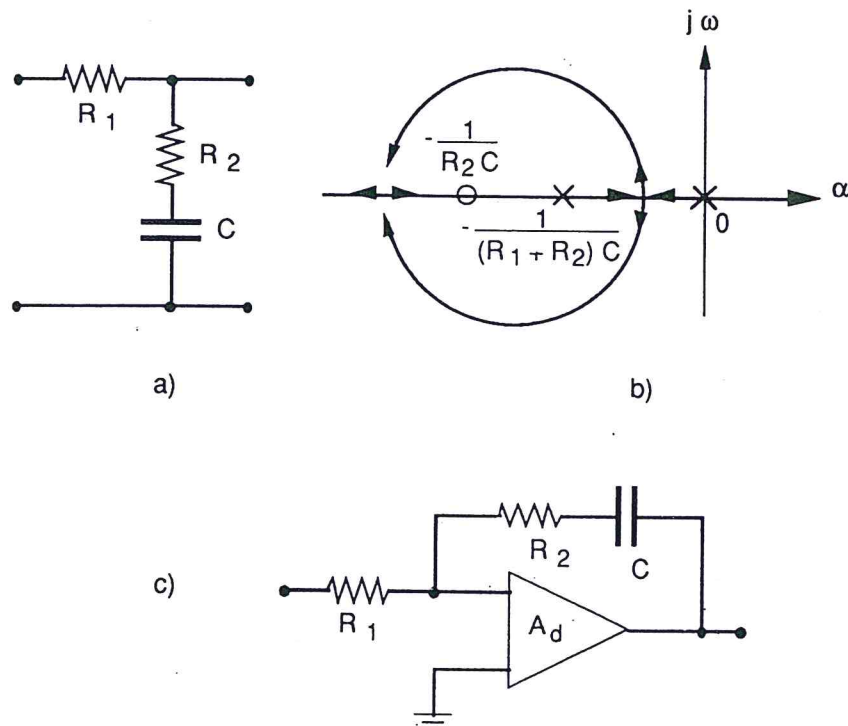


Fig. 5.8

Si avrà:

$$T(s) = \frac{k_p k_v}{s} \frac{1 + s R_2 C}{1 + s (R_1 + R_2) C} \quad (5.13)$$

e, conseguentemente, il luogo delle radici di Fig. 5.8.b. Anche in questo caso il denominatore della funzione di trasferimento  $H(s)$  è del secondo ordine con:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_p k_v}{(R_1 + R_2) C}} \quad (5.14)$$

e un fattore di smorzamento:

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{1 + k_p k_v R_2 C}{\sqrt{(R_1 + R_2) C k_p k_v}} \quad (5.15)$$

La funzione di trasferimento assume la forma:

$$H(s) = \frac{s \omega_n \left( 2 \zeta - \frac{\omega_n}{k_p k_v} \right) + \omega_n^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.16)$$

Si vede che la immissione di uno zero in  $T(s)$  aumenta la flessibilità del sistema in quanto è ora possibile fissare con una certa indipendenza  $\omega_n$  e  $\zeta$ . Per questa ragione si usa quasi sempre una cella filtrante del tipo mostrato in Fig. 5.8.a. Una sua variante significativa è mostrata in Fig. 5.8.c e, nel limite di poter considerare  $A_d \rightarrow \infty$ , si ha:

$$T(s) = \frac{k_p k_v}{s} \frac{1 + s R_2 C}{s R_1 C} \quad (5.17)$$

avendo recuperato il cambio di segno dovuto all'amplificatore, se necessario, con una successiva inversione. La frequenza di risonanza vale:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_p k_v}{R_1 C}} \quad (5.18)$$

e il fattore di smorzamento è:

$$\zeta = \frac{1}{2} \omega_n R_2 C \quad (5.19)$$

In questo caso si ottiene l'ulteriore vantaggio di mandare a zero l'errore espresso dalla (5.6).

La funzione di trasferimento assume la forma:



$$H(s) = \frac{2 s \zeta \omega_n + \omega_n^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.20)$$

Le (5.16) e (5.20) sono strutturalmente identiche; inoltre, se  $k_p k_v \gg \omega_n$ , la (5.16) viene in pratica a coincidere con la (5.20). In questo caso, che è quello che si incontra nella pratica, l'anello viene detto "ad alto guadagno".

Le considerazioni che precedono ci permettono di completare il discorso sugli effetti del rumore impostato nel par. 5.3.a. Lo spettro di potenza delle fluttuazioni di fase in uscita dal PLL sarà infatti:

$$S_{\varphi_v \varphi_v} = S_{\varphi_i \varphi_i} |H(j\omega)|^2$$

e la potenza del processo in uscita sarà quindi:

$$\overline{\varphi_v^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N}{2SB} |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.21)$$

Il valore della (5.21), una volta noto il rapporto segnale-rumore in ingresso, è determinato da  $H(s)$ . Se questa ha la forma (5.20) si ha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{\omega_n}{2} \left( \zeta + \frac{1}{4\zeta} \right) = B_n \quad (5.22)$$

La (5.22) ha un minimo per  $\zeta = 0.5$ , dove vale  $\omega_n/2$ . E' noto che, in un sistema del secondo ordine come quello che stiamo studiando, si ottiene una risposta in frequenza ottima per  $\zeta = 0.7$ . Poiché il minimo della (5.22) non è molto pronunciato, non si fa un grande errore a scegliere  $\zeta = 0.7$ , con il che  $B_n = 0.53 \omega_n$ .

Si ha quindi:

$$\overline{\varphi_v^2(t)} = \frac{N}{2SB} B_n \quad (5.23)$$

dalla quale si vede, ricordando la (5.8), che l'anello riduce la potenza del rumore di fase in ingresso del rapporto  $B_n/B$ .

Per concludere, si riconsideri la (5.12): il disturbo risultante ha una struttura che somiglia a quella di una risonanza e in realtà esso ha un minimo relativo di ampiezza per  $\Delta\omega = 0$  e un massimo

per un valore di  $\Delta\omega$  che dipende dalla funzione di trasferimento dell'LPF. Se si sceglie  $\zeta = 0.7$  la differenza tra il valore massimo e il minimo relativo è dell'ordine di  $10^{-4}$ .

## 5.5 Specifiche di progetto di un PLL

Una volta stabilito l'intervallo delle frequenze di lavoro, il comportamento del PLL è descritto da quattro parametri:

1. L'intervallo di aggancio (Lock Range): è l'intervallo  $\pm \Delta\omega_L$  intorno a  $\omega_0$  nel quale: a) l'anello si mantiene statisticamente (cioè in media) agganciato una volta conseguita la condizione di aggancio e b) il recupero dell'aggancio avviene con andamento monotono della differenza  $\phi_i - \phi_v$ .

All'interno di  $\pm \Delta\omega_L$  quindi: a) l'anello può perdere sincronismo soltanto momentaneamente a causa del rumore di fase e b) vale l'analisi lineare eseguita ai par. 5.2, 5.3 e 5.4.

Per determinare  $\Delta\omega_L$  si può procedere come segue. Se il segnale di ingresso presenta uno scarto di frequenza  $\Delta\omega$  rispetto a  $\omega_0$  avremo, nel caso si usi come PD un moltiplicatore(\*):

$$e_p(t) = k_p \text{sen } \Delta\omega t$$

oltre a termini a frequenze superiori che saranno eliminati dall'LPF, il quale produce un segnale:

$$e_v(t) = |W(j\Delta\omega)| k_p \text{sen}(\Delta\omega t + \phi_{\Delta\omega}) \quad (5.24)$$

con  $\phi_{\Delta\omega}$  pari alla fase di  $W(j\Delta\omega)$ . Ciò significa che  $v_v(t)$  avrà una variazione massima della sua frequenza pari a:

$$\Delta\omega_{v_{\max}} = k_p k_v |W(j\Delta\omega)|$$

Se  $\Delta\omega_{v_{\max}} \geq \Delta\omega$ , l'anello si aggancia entro un solo periodo del tono differenza ( $\Delta\omega$ ). L'equazione che definisce  $\Delta\omega_L$  è quindi:

---

(\*) Si tornerà su questo argomento nel par. 5.6.

$$\Delta\omega_L = k_p k_v |W(j\Delta\omega_L)| \quad (5.25)$$

che è non lineare in  $\Delta\omega_L$  e può essere risolta per iterazione iniziando il secondo membro con  $W(0)$ . Per anelli ad alto guadagno è possibile dare una valutazione approssimata di  $\Delta\omega_L$ , notando che, grazie all'alto valore di  $k_p k_v$ , la (5.25) fornisce valori di  $\Delta\omega_L$  sempre maggiori delle frequenze caratteristiche  $1/(R_1C)$  e  $1/(R_2C)$ . Ciò significa che, nel caso del filtro di Fig. 5.8.a:

$$|W(j\Delta\omega_L)| \cong \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.25')$$

e nel caso del filtro di Fig. 5.8.c avremo:

$$|W(j\Delta\omega_L)| \cong \frac{R_2}{R_1} \quad (5.25'')$$

Con queste approssimazioni e facendo uso di quanto detto a proposito della (5.20) si ottiene:

$$\Delta\omega_L \cong 2 \zeta \omega_n \quad (5.26)$$

Inoltre, avendo stabilito di assumere  $\zeta = 0.7$ , la tensione  $e_v(t)$  eseguirà una sovraelongazione il cui pseudoperiodo è dell'ordine di  $\omega_n$ . Una valutazione del tempo  $T_L$  di aggancio sarà quindi data da:

$$T_L \cong \frac{2 \pi}{\omega_n} \quad (5.27)$$

Nella Fig. 5.9 è mostrata l'uscita del VCO (che spesso è un'onda quadra) prima e dopo che un ingresso sinusoidale con frequenza contenuta entro  $\pm \Delta\omega_L$  da  $\omega_0$  spinga l'anello ad operare l'aggancio.

2. L'intervallo di sgancio (Pull-Out Range): è l'ampiezza  $\Delta\omega_{PO}$  del gradino di frequenza che bisogna applicare in ingresso affinché l'anello perda l'aggancio. Si tratta quindi di un parametro dinamico e, per questa ragione, esso è difficilmente calcolabile. Una sua valutazione, ricavata da simulazioni, nel caso si usi un moltiplicatore come PD, è:

$$\Delta\omega_{PO} \cong 1.8 \omega_n (\zeta + 1) \quad (5.28)$$



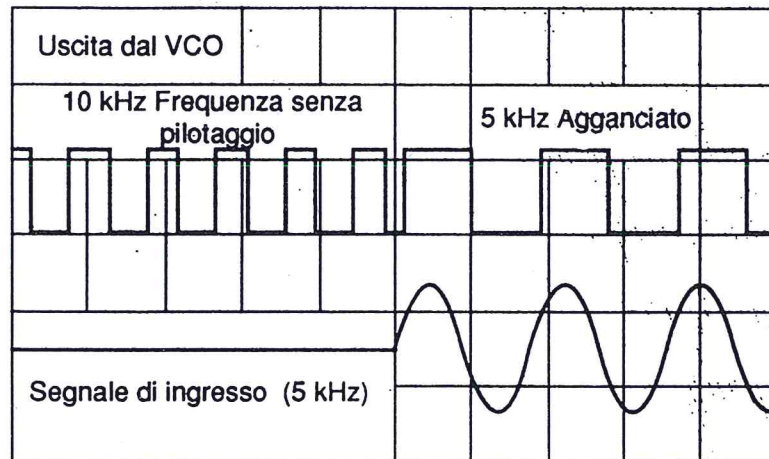


Fig. 5.9

Per  $\zeta = 0.7$  si ha che  $\Delta\omega_{PO} \cong 3 \omega_n > \Delta\omega_L \cong 1.4 \omega_n$ .

3. L'intervallo di recupero (Pull-In Range): è l'ampiezza  $\Delta\omega_{PI}$  dell'intervallo all'interno del quale si può ottenere la condizione di aggancio, anche se con un processo che impiega un tempo pari a molti periodi del tono differenza. Come ciò possa avvenire è presto detto se si considera che la (5.24) non è realistica a tempi lunghi. Infatti, la stessa presenza di  $e_v(t)$  spinge alternativamente la frequenza del VCO verso  $\omega_i$  e lontano da essa. Ma, nel primo caso, il segnale di correzione tende a diminuire, quindi il VCO indugia maggiormente a cambiare frequenze di quando invece esso è pilotato verso valori che si allontanano da  $\omega_i$ . All'interno di  $\Delta\omega_{PI}$  questo processo è rigenerativo e spinge il VCO verso l'aggancio. Se interrompiamo la reazione al VCO, per  $\omega_i \neq \omega_0$  la tensione  $e_v(t)$  ha quindi un andamento periodico del tipo mostrato in Fig. 5.10.

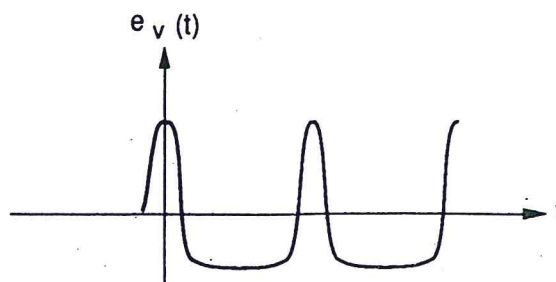


Fig. 5.10

Grazie alla non linearità del processo, la tensione  $e_v(t)$  avrà valore medio diverso da zero e sarà proprio tale valore medio a spingere il VCO verso la condizione di aggancio. Naturalmente, la modalità dell'aggancio sarà funzione del tipo di PD e di LPF utilizzati nel PLL. La Fig. 5.11 mostra un possibile andamento della tensione  $e_v(t)$  e dell'uscita del VCO in un caso di aggancio ad una frequenza di ingresso  $\omega_i \neq \omega_0$  e non contenuta nel lock range.

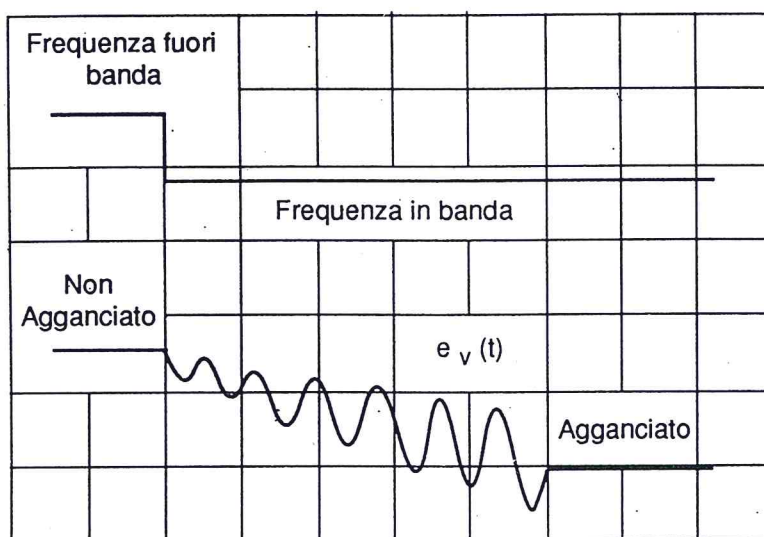


Fig. 5.11

Anche in questo caso, per la non linearità delle equazioni differenziali che descrivono il fenomeno, il calcolo dell'intervallo di pull-in non è semplice ed esula dai limiti di queste note. Rimandando per esso ai testi di bibliografia, si riportano i risultati utili nelle equazioni di progetto. Per il caso di anelli ad alto guadagno si ha, se si usa il filtro passivo:

$$\Delta\omega_{PI} \cong \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\zeta \omega_n k_p k_v} \quad (5.29)$$

Se si usa il filtro attivo:

$$\Delta\omega_{PI} \rightarrow \infty \quad (5.30)$$

cioè il pull-in è limitato dalla dinamica in frequenza del VCO.

- 4) Infine, si definisce l'intervallo di mantenimento (Hold range): è quell'intervallo  $\Delta\omega_H$  all'interno del quale l'anello è in grado di mantenere l'aggancio per variazioni lente (ossia con frequenza molto più bassa di  $\omega_n$ ) della frequenza  $\omega_i$ . Per calcolare  $\Delta\omega_H$  si consideri la (5.6), derivata supponendo un funzionamento lineare del PD [v. Eq. (5.1)]. In realtà una tale ipotesi è verificata solo per piccole differenze di fase, mentre in generale  $e_p(t)$  sarà proporzionale ad una generica funzione  $f[\Delta\varphi(t)]$  della differenza di fase. Per cui si avrà:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f[\Delta\varphi(t)] = \frac{\Delta\omega_i}{k_p k_v W(0)} \quad (5.6')$$

Il sistema sarà in grado di rispettare l'aggancio fino a quando  $\Delta\omega_i$  sarà tale che la  $f[\Delta\varphi(t)]$  avrà raggiunto il suo massimo valore. Perciò:

$$\Delta\omega_H = k_p k_v W(0) \cdot \max\{f[\Delta\varphi(t)]\} \quad (5.31)$$

Per il filtro attivo  $\Delta\omega_H \rightarrow \infty$  in quanto  $W(0) \rightarrow \infty$ : il valore di hold range è quindi limitato dalla dinamica in frequenza del VCO.

Per concludere, si può affermare che usualmente è:

$$\Delta\omega_L < \Delta\omega_{PO} < \Delta\omega_{PI} < \Delta\omega_H \quad (5.32)$$

e che in generale l'intervallo nel quale si fa lavorare un PLL non eccede  $\Delta\omega_L$ .

## 5.6 Il rivelatore di fase

Nei paragrafi precedenti si è eseguita una analisi sostanzialmente lineare del funzionamento del PLL; per questa ragione si esplicitò la struttura del solo LPF, lasciando indeterminata quella degli altri due blocchi. Come subito si vedrà, il tipo di realizzazione del rivelatore di fase influisce non poco su quanto detto a proposito delle caratteristiche di un PLL.

Tra i vari PD che possono essere realizzati, si esamineranno soltanto i seguenti:



- il moltiplicatore analogico a quattro quadranti;
- l'EXOR;
- i PD a cella SR;
- il PD a contatore sincrono.

Si noterà che, tranne il primo, tutti gli altri PD usano celle di elaborazione digitale. In realtà, anche l'LPF e il VCO possono essere realizzati con tecniche digitali, e il PLL viene quindi considerato (parzialmente o totalmente) un anello digitale. Non ci si occuperà di tali realizzazioni in queste note, rimandando per esse ai testi di bibliografia.

L'ultimo dei PD listati, quello a contatore, ha applicazioni soprattutto nella sintesi di frequenza e per questa ragione ne sarà solo accennata la realizzazione. Per le celle EXOR e SR (v. parr. 2.6 e 3.2, Vol. 3), il calcolo di  $\Delta\omega_{PO}$  e  $\Delta\omega_{PI}$  porta a relazioni strutturalmente identiche a quelle relative al moltiplicatore, ma con un coefficiente leggermente maggiore. Si useranno quindi rispettivamente le (5.28), (5.29) e (5.30) come valori di stima cautelativa.

#### 5.6.a Il moltiplicatore analogico a quattro quadranti

L'argomento viene esaminato in relazione alla sua applicazione come PD in un PLL; in realtà un moltiplicatore analogico è un subsystema, evidentemente non lineare, che può essere utilizzato come mescolatore, modulatore, demodulatore e via dicendo. Essendo quindi un blocco di notevole importanza, ad esso sarà devoluta una particolare attenzione.

Un moltiplicatore analogico (Fig. 5.12) sarà caratterizzato, tra l'altro, dai seguenti parametri:

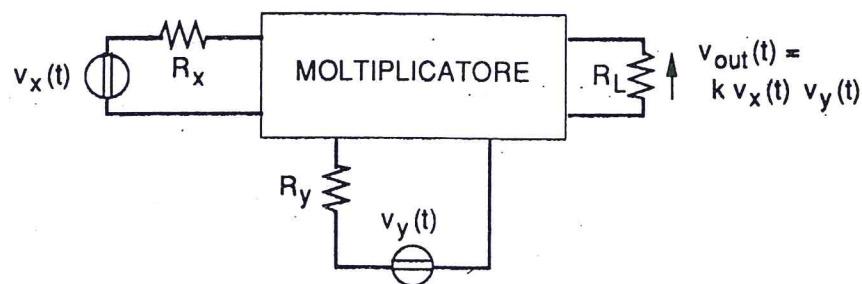


Fig. 5.12

- intervallo di frequenza di funzionamento;
- dinamiche degli ingressi e fattore di scala dell'uscita;
- costanza del fattore di scala con la temperatura, la tensione di alimentazione e via dicendo;
- precisione nell'esecuzione del prodotto, che può essere espressa in vari modi; per esempio:
  - a) valore di  $v_{out}$  quando  $v_x$  o  $v_y$  siano nulli;
  - b) valore della componente a  $\omega$  e  $3\omega$  quando  $v_x = v_y = A \sin \omega t$ ;
  - c) andamento di  $\overline{V_{out}}$  in funzione di  $\overline{V_x}$  per diversi valori di  $\overline{V_y}$ ;
- tutti o parte dei parametri detti, al variare della frequenza.

### 5.6.a.1 Moltiplicatore analogico a cella di Gilbert

All'interno della sua banda passante e fintanto che possono essere trascurati i ritardi di fase da esso introdotti, un amplificatore può essere considerato come un moltiplicatore analogico per un fattore costante. Scaturisce da questa considerazione una possibile realizzazione di un moltiplicatore analogico: si tratta cioè di realizzare una rete a tre porte delle quali una accetta il segnale  $x$  da amplificare, una il segnale  $y$  che varia proporzionalmente l'amplificazione cui è sottoposto  $x$  e l'ultima fornisce, come uscita, un segnale proporzionale al prodotto  $x \cdot y$  (v. Fig. 5.12).

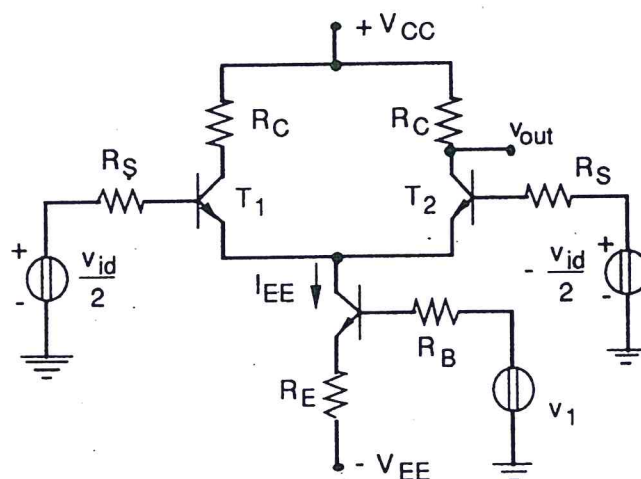


Fig. 5.13

Una prima realizzazione del componente potrebbe essere una cella di amplificazione differenziale come quella mostrata in Fig. 5.13, nella quale, per semplicità di disegno, si sono omessi polarizzazione, condensatori di blocco e altri accessori, necessari ma non direttamente coinvolti nelle operazioni schematizzate in Fig. 5.12. Con approssimazioni facilmente intuibili, si ha:

$$i_{EE} = \frac{V_1}{R_E}$$

$$g_{m1} = g_{m2} = \frac{I_{EE}}{2} \frac{1}{V_T} = g_{m0} + \frac{V_1}{2 R_E} \frac{1}{V_T}$$

$$v_{out} = \frac{g_{m2}}{2} R_C v_{id} = \frac{g_{m0}}{2} R_C v_{id} + \frac{R_C}{4 R_E V_T} V_1 v_{id} \quad (5.33)$$

Dalla (5.33) si vede che la cella è in grado di eseguire il prodotto di due tensioni. In realtà, si deve ricordare che l'analisi svolta è valida solo in regime lineare, quindi si deve precisare che:

- la dinamica dell'ingresso differenziale è ridotta ad una piccola frazione di  $V_T$  a causa della non linearità della cella differenziale (v. par. 2.10 Vol. 1);
- la costante di proporzionalità è direttamente dipendente dalla temperatura con coefficiente pari a 0.34%/°C intorno a 25 °C.

Per quanto precede, la cella differenziale viene modificata in ciò che va sotto il nome di cella di Gilbert(\*) rappresentata in Fig. 5.14.

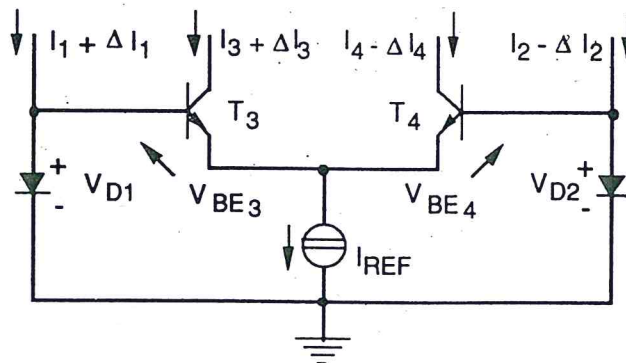


Fig. 5.14

(\*) B. Gilbert, Op. Cit..



Annullando la somma delle tensioni nella maglia dei diodi si ha:

$$V_{D1} - V_{BE3} + V_{BE4} - V_{D2} = 0$$

$$V_T \ln \frac{I_1 + \Delta I_1}{I_{S1}} - V_T \ln \frac{I_3 + \Delta I_3}{I_{S3}} +$$

$$+ V_T \ln \frac{I_4 - \Delta I_4}{I_{S4}} - V_T \ln \frac{I_2 - \Delta I_2}{I_{S2}} = 0$$

cioè:

$$\frac{I_{S3} I_{S2} (I_1 + \Delta I_1)(I_4 - \Delta I_4)}{I_{S1} I_{S4} (I_3 + \Delta I_3)(I_2 - \Delta I_2)} = 1$$

Si noti esplicitamente che:

- non si è usato un modello linearizzato delle giunzioni, quindi il risultato non ha validità limitata ai "piccoli segnali";
- è sparita la dipendenza dalla temperatura.

Se si costruiscono le giunzioni uguali a due a due ( $I_{S1} = I_{S2}$  e  $I_{S3} = I_{S4}$ ), se il differenziale è bilanciato ( $I_4 = I_3$ ) e se  $\Delta I_1 = \Delta I_2$ , si ha:

$$\Delta I_3 = \Delta I_4 = \frac{\Delta I_1 I_{REF}}{2 I_1} \quad (5.34)$$

che realizza la moltiplicazione desiderata. Si noterà, comunque, che resta la limitazione su  $I_{REF}$  che non può cambiare segno, cioè la (5.34) realizza ciò che si chiama un moltiplicatore a due quadranti.

Per ovviare a ciò si consideri la cella di Fig. 5.15.a che raddoppia quella elementare di Fig. 5.13 e che può essere rappresentata come in Fig. 5.15.b per la sola parte differenziale. Si ha, limitandosi ad un'analisi per piccoli segnali (ma i risultati potrebbero essere confermati da una analisi basata sul modello di Ebers-Moll che, ovviamente, risulterebbe più complicata):

$$I_A - I_B = g_{m0} (1 + k' v_{2d}) v_{1d}$$

$$I_D - I_C = -g_{m0} (1 - k v_{2d}) v_{1d}$$

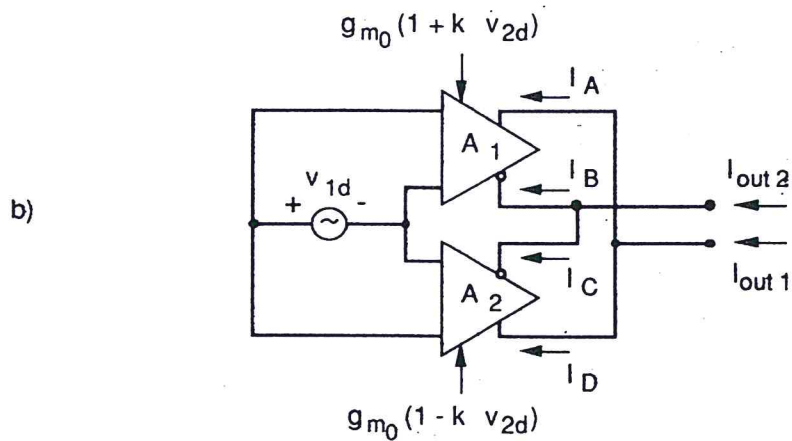
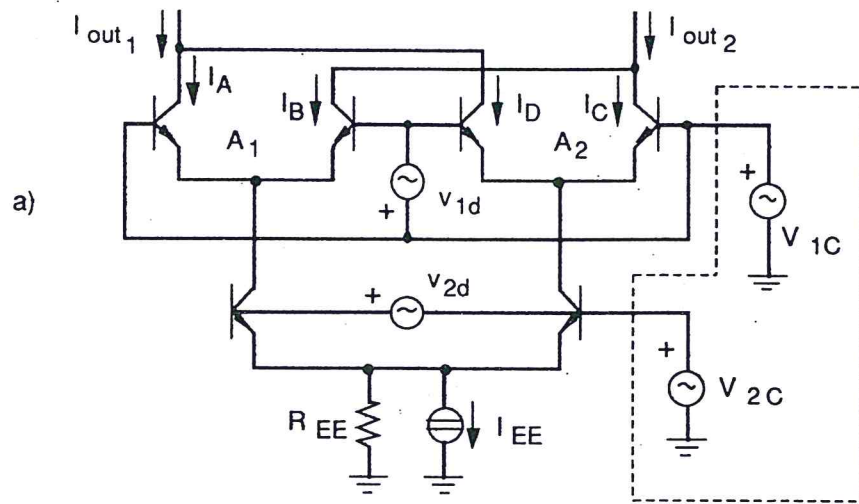


Fig. 5.15

Detto:

$$I_{out} = I_{out1} - I_{out2}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} I_{out} &= (I_A + I_D) - (I_B + I_C) = \\ &= g_{m0} v_{1d} [(1 + k v_{2d}) - (1 - k v_{2d})] = \\ &= 2 g_{m0} k v_{1d} v_{2d} \end{aligned} \quad (5.35)$$

senza limitazioni di segno nella dinamica permessa.

Accoppiando il risultato (5.35) con quello (5.34), relativo alla cella di Gilbert, si ottiene lo schema mostrato in Fig. 5.16, dove l'amplificatore finale realizza la conversione tra la (5.35) e una tensione di uscita verso massa se:

$$R_4 // R_6 = R_5 // R_3$$

e la  $V_{REF}$  è da considerarsi integrata.

Si riconoscerà nei transistor indicati con A, B, C e D, Q10 e Q11 la struttura descritta nella Fig. 5.15, mentre Q2A, Q2B, Q6 e Q7 realizzano la struttura e il tipo di pilotaggio descritti nella Fig. 5.14.

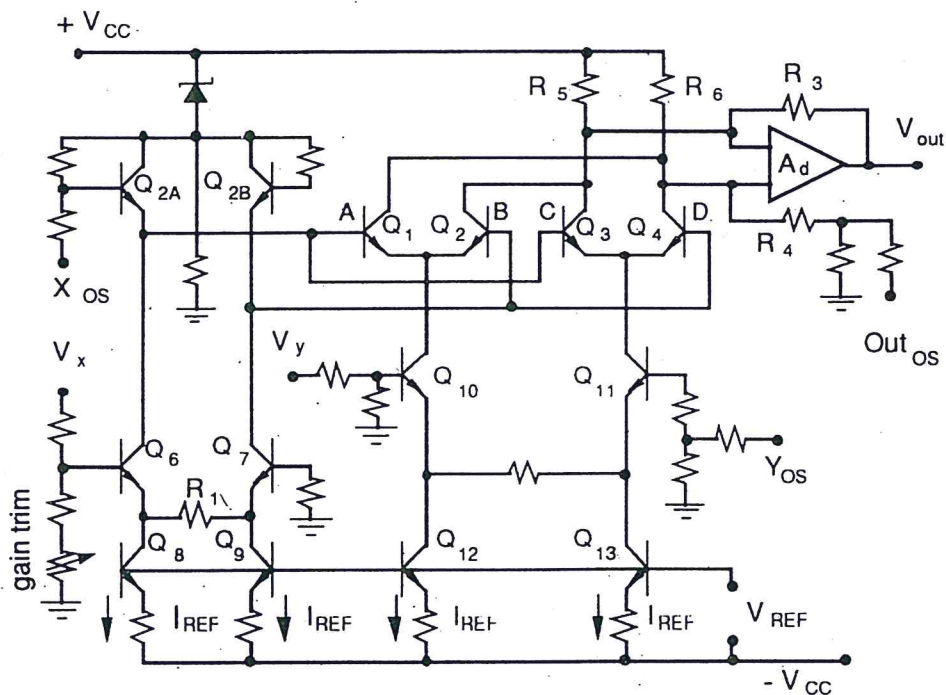


Fig. 5.16

Le due entrate indicate con OS servono per bilanciare le celle differenziali e gli altri comandi hanno funzioni evidenti.

Dalle Fig. 5.15 si ricava che le tensioni di modo comune, che si riflettono in uscita secondo relazioni che coinvolgono il rapporto tra la resistenza di collettore e quella di uscita del ramo di polarizzazione del punto di somma del differenziale, non si moltiplicano tra loro, ma generano un errore additivo. Per questa ragione i moltiplicatori integrati hanno ingressi differenziali secondo lo schema di Fig. 5.17.



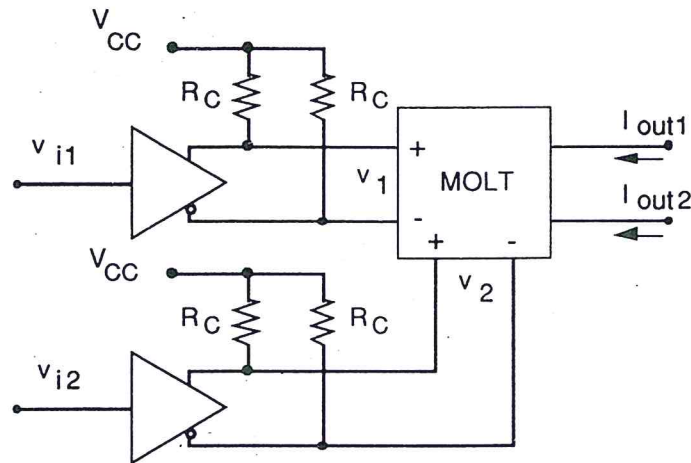


Fig. 5.17

Un componente integrato (AD834), realizzato secondo la teoria sopra esposta, ha le seguenti caratteristiche:

- dinamica di ingresso  $\pm 1$  V;
- dinamica di uscita  $\pm 4$  mA;
- alimentazione da  $\pm 4$  V a  $\pm 9$  V;
- errore massimo 0.5 % della dinamica;
- banda di lavoro fino a 500 MHz;
- ingressi  $X_{OS}$ ,  $Y_{OS}$  e  $Out_{OS}$  assenti perché il componente è compensato internamente;
- rumore in uscita su  $50 \Omega$ :  $16 \text{ nV/Hz}^{1/2}$  da 10 Hz a 1 MHz;
- con uno degli ingressi a fondo scala e l'altro a zero, l'uscita è al massimo a -50 dB fino a 100 MHz;
- intervallo di temperatura di funzionamento della versione commerciale: 0-70 °C.

### 5.6.a.2 Moltiplicatore a MOSFET

Un altro meccanismo utile per raggiungere la desiderata funzione I/O è quello di sfruttare la relazione:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

In questo caso viene utile il legame tra corrente di drain e tensione di gate di un MOS in saturazione, cioè:

$$I_D = \frac{\beta}{2} (V_{GS} - V_T)^2$$

Una possibile realizzazione del moltiplicatore è quindi mostrata in Fig. 5.18 nella quale la funzione  $\Sigma$  può essere realizzata dalla cella di Fig. 5.19 con opportuna selezione dei fattori di forma dei 4 transistor impiegati.

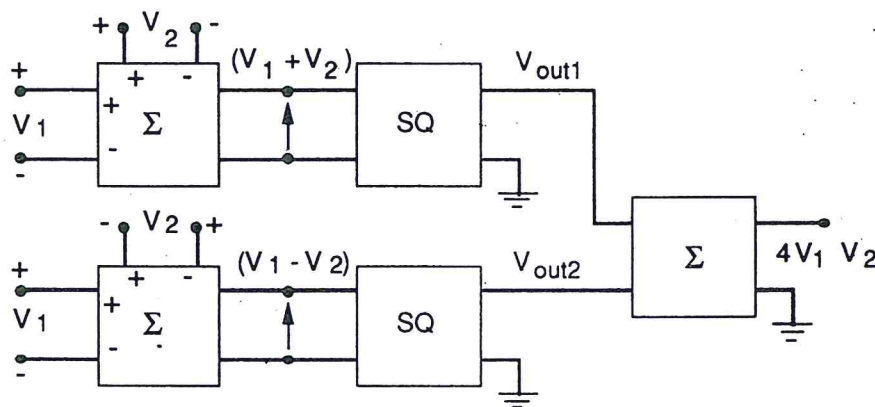


Fig. 5.18

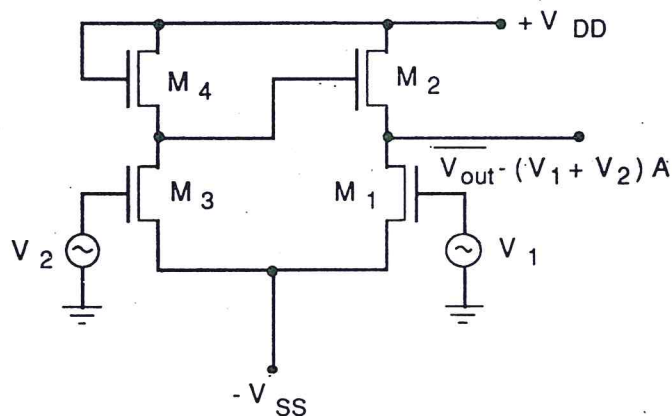


Fig. 5.19

Per eliminare le tensioni di polarizzazione si può passare ad una simmetrizzazione della cella, ottenendo lo schema con entrate differenziali di Fig. 5.20.

Si capisce che, invertendo uno dei due ingressi, si ottiene in uscita la differenza, invece della somma, dei segnali di ingresso.

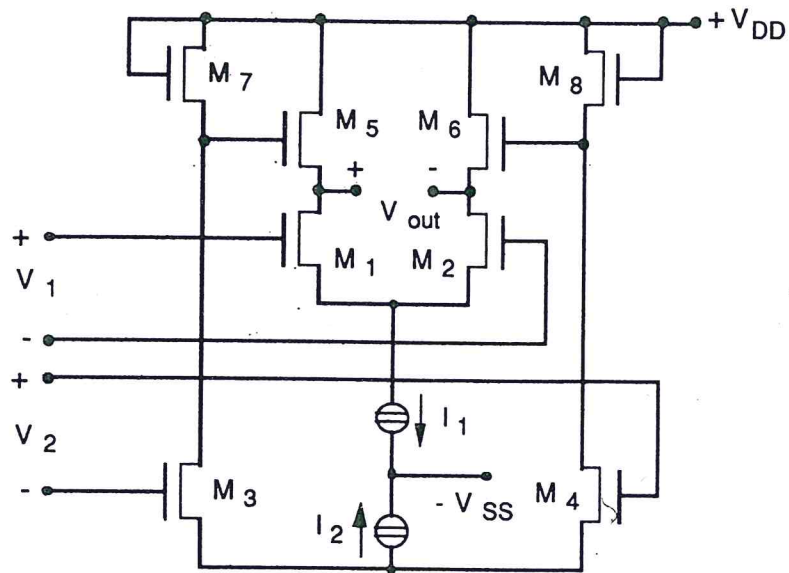


Fig. 5.20

Detto questo, resta da realizzare il quadratore: per esso si può utilizzare la cella di Fig. 5.21.

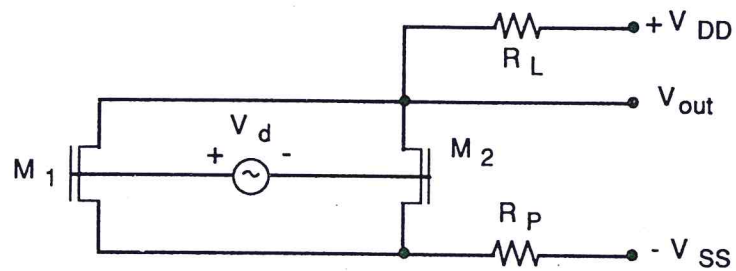


Fig. 5.21

per la quale si ha:

$$\begin{aligned}
 V_{out} &= \overline{V_{out}} - R_L (I_{D1} + I_{D2}) = \overline{V_{out}} - \frac{\beta}{2} R_L [(V_{GS1} - V_T)^2 + (V_{GS2} - V_T)^2] = \\
 &= \overline{V_{out}} - \frac{\beta R_L}{2} \left[ \left( \overline{V_{GS}} + \frac{V_d}{2} - V_T \right)^2 + \left( \overline{V_{GS}} - \frac{V_d}{2} - V_T \right)^2 \right] =
 \end{aligned}$$



$$= \overline{V_{out}} - \beta R_L \left[ \overline{(V_{GS} - V_T)^2} + \frac{V_d^2}{4} \right]$$

I termini di polarizzazione vengono eliminati nella successiva operazione di differenza.

L'uso di un moltiplicatore analogico come PD si basa sul fatto che, se ai suoi ingressi si presentano due sinusoidi della stessa frequenza, l'operazione di moltiplicazione fornisce in uscita:

$$A_1 A_2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_1 t + \varphi) = \frac{A_1 A_2}{2} [\cos \varphi - \cos (2 \omega_1 t + \varphi)]$$

Per la presenza dell'LPF il termine a frequenza doppia viene eliminato e il segnale utile risulta quindi proporzionale al coseno della differenza di fase tra i due segnali. Essi saranno quindi, ad aggancio avvenuto, sfasati di  $\pi/2$ . In altre parole, il VCO genererà un segnale sincrono con quello di ingresso, ma rispetto ad esso sfasato di  $\pi/2$ .

In un PLL che usi un moltiplicatore come PD, la (5.31) fornisce quindi  $\Delta\omega_H = k_p k_v W(0)$ . Si noti esplicitamente che, in questo caso,  $k_p$  è funzione delle ampiezze dei segnali in ingresso al moltiplicatore e della loro forma.

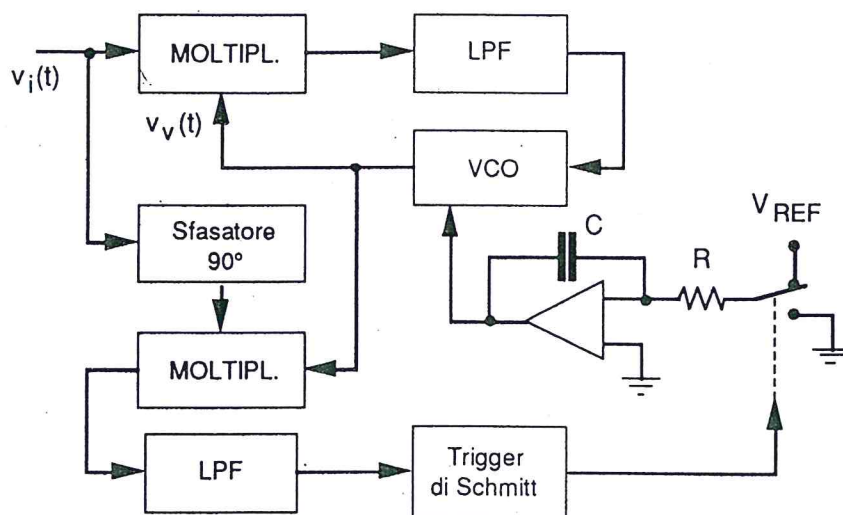


Fig. 5.22

La Fig. 5.22 mostra uno schema a blocchi nel quale il VCO viene in un primo momento comandato da una rampa che gli fa percorrere

la sua dinamica in frequenza fino a quando quest'ultima non coincide con quella di ingresso.

In questa situazione il moltiplicatore del PLL (filtrato) fornisce, a regime, un segnale nullo, mentre quello che segue lo sfasatore di  $90^\circ$  fornisce il suo segnale massimo.

Appena quest'ultimo sale al di sopra della soglia del trigger di Schmitt l'uscita del generatore di rampa (v. par. 5.7.a.1, Vol. 1) viene bloccata, l'anello mantiene la sua condizione di aggancio e il segnale del trigger può essere usato come indicatore di sintonia.

### 5.6.b La porta EXOR

I rivelatori di fase che seguono richiedono in ingresso dei segnali standardizzati, generalmente sotto forma di onda quadra che, supponendo di usare la tecnologia CMOS, ha dinamica compresa tra zero e  $V_{DD}$  (tensione di alimentazione).

Nel caso venga usata una porta EXOR per la rivelazione di fase e supposto che i segnali di ingresso siano stati in qualche modo standardizzati (per esempio con un comparatore, v. par. 5.6 Vol. 1), la situazione di equilibrio del PLL prevede che le due onde quadre siano sfasate di  $90^\circ$ .

All'uscita dell'EXOR si genera un'onda quadra a frequenza doppia di quelle entranti: l'LPF fornisce al VCO il valore medio pari a  $V_{DD}/2$  e con questo valore all'ingresso di controllo il VCO dovrà oscillare alla frequenza centrale della sua dinamica.

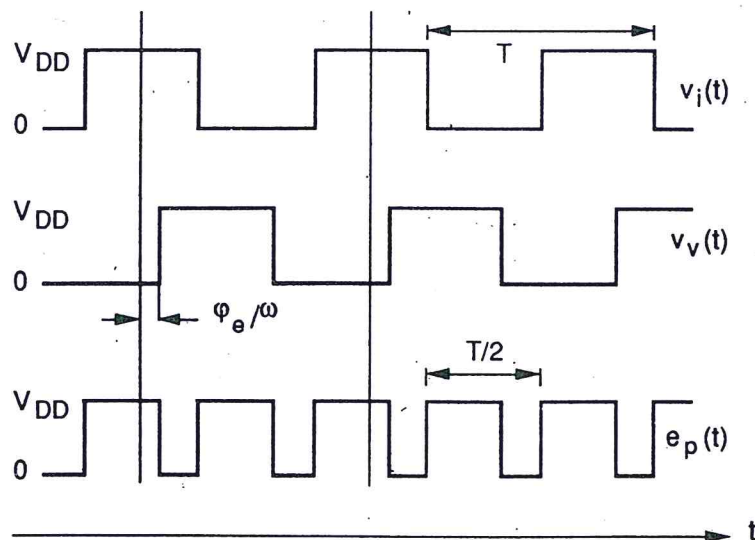


Fig. 5.23

Dalla Fig. 5.23 si desume facilmente il funzionamento di questo PD: se ci si scosta di  $\varphi_e$  dalla posizione di equilibrio, il valore medio della forma d'onda di uscita vale:

$$\overline{e_p(t)} = \frac{V_{DD}}{2} + V_{DD} \frac{\varphi_e}{\pi} \quad (5.36)$$

e:

$$k_p = \frac{V_{DD}}{\pi} \quad (5.37)$$

La rivelazione è quindi lineare per  $\varphi_e$  compreso in  $\pm \pi/2$  e nel periodo  $-\pi \div +\pi$  presenta discontinuità nella derivata prima (Fig. 5.24).

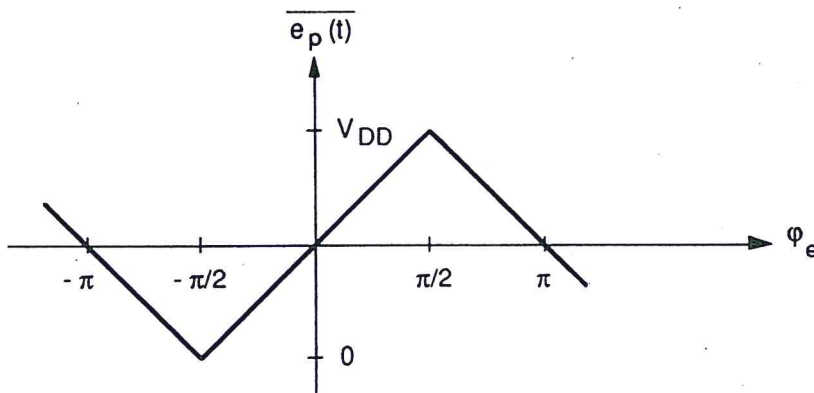


Fig. 5.24

La massima variazione del segnale all'uscita dell'EXOR è quindi  $k_p \pi/2$ , mentre il massimo segnale in uscita del moltiplicatore era  $k_p$ . Ne deriva che, in questo caso:

$$\Delta\omega_L \cong \pi \zeta \omega_n \quad (5.26')$$

Inoltre, applicando la (5.31) avremo:

$$\Delta\omega_H = k_p k_v W(0) \pi/2 \quad (5.31')$$



### 5.6.c La cella SR

In questa applicazione si usa una cella SR che commuti sui fronti positivi.

La situazione di equilibrio del PLL prevede che le due onde quadre, applicate agli ingressi S ed R, siano in opposizione di fase e, in questa condizione, l'uscita è un'onda quadra, sincrona con gli ingressi, di valore medio pari a  $V_{DD}/2$ .

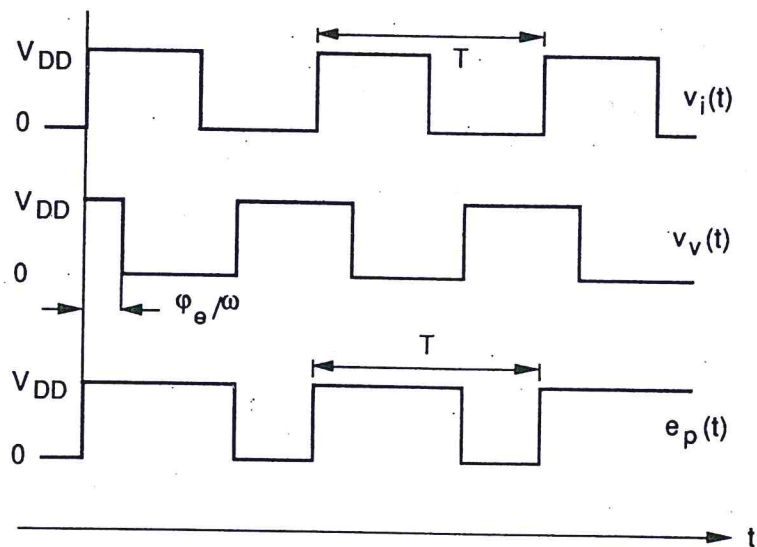


Fig. 5.25

Per un errore di fase  $\phi_e$  si ha:

$$\overline{e_p(t)} = \frac{V_{DD}}{2} + V_{DD} \frac{\phi_e}{2\pi} \quad (5.38)$$

e:

$$k_p = \frac{V_{DD}}{2\pi} \quad (5.39)$$

La rivelazione è quindi lineare per  $\phi_e$  compreso in  $\pm\pi$  e presenta discontinuità sul valore, come mostrato in Fig. 5.26.

In questo caso è, quindi:

$$\Delta\omega_L \cong 2\pi\zeta\omega_n \quad (5.26'')$$

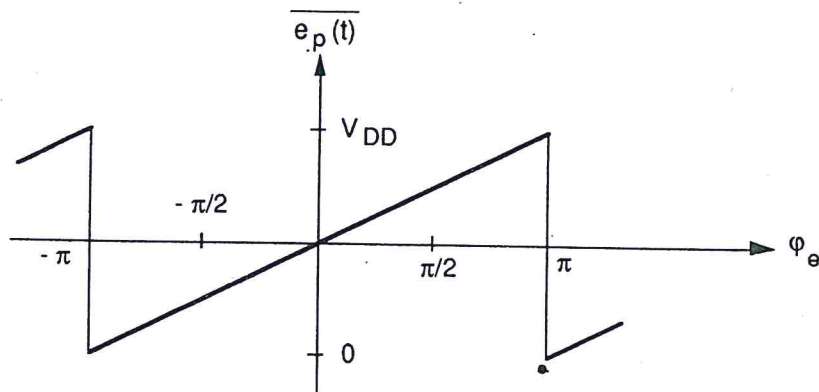


Fig. 5.26

mentre:

$$\Delta\omega_H = k_p k_v W(0) \pi \quad (5.31'')$$

#### 5.6.d Il PD a contatore sincrono

Si tratta di una variante dell'SR capace di fornire l'informazione sull'errore  $\varphi_e$  sotto forma binaria. La situazione di equilibrio si ha con i due ingressi in fase e lo schema a blocchi del PD è mostrato in Fig. 5.27.

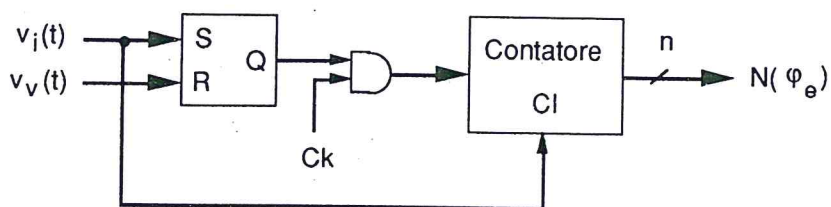


Fig. 5.27

Tutti i blocchi di memoria (v. par. 3.2, Vol. 3) commutano sui fronti positivi e, quando gli ingressi sono in fase, il contatore, che viene azzerato tramite l'ingresso di clear (CI) ad ogni fronte positivo di  $v_i(t)$ ; presenta in uscita un conteggio nullo.

In presenza di uno sfasamento  $\varphi_e$  la situazione è mostrata in Fig. 5.28 e non necessita di ulteriori commenti.

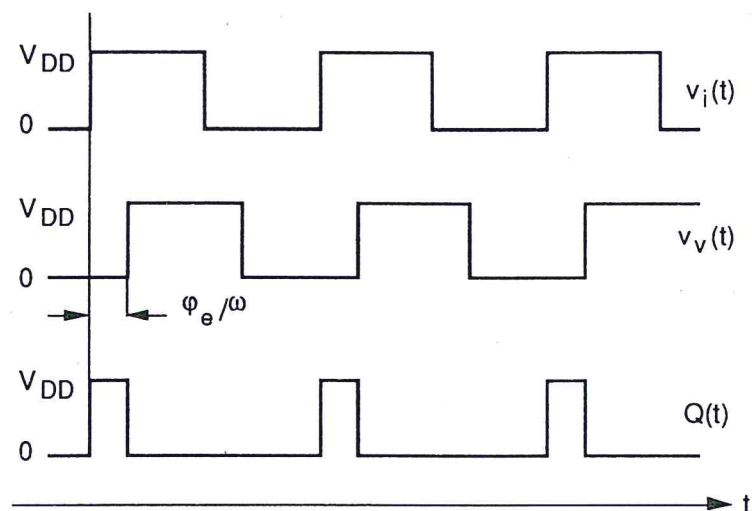


Fig. 5.28

L'uscita del contatore è un numero pari a:

$$N(\varphi_e) = I \left[ \frac{\varphi_e f_{ck}}{2 \pi f_i} \right] \quad (5.40)$$

dove  $I$  sta per "parte intera di",  $f_{ck}$  è la frequenza di clock e  $f_i$  quella di ingresso (e del VCO agganciato).

In questo caso la costante  $k_p$  dipende dalla frequenza di ingresso determinando un comportamento non lineare dell'anello e la  $f_{ck}$  deve essere scelta in modo tale che, alla minima  $f_i$ , sia:

$$\frac{f_{ck}}{f_i} = 2^n - 1$$

## 5.7 L'oscillatore controllato in tensione

Esiste una gran varietà di schemi di VCO e, del resto, oggi il VCO è un componente integrato o singolarmente o come parte di un integrato che comprende praticamente tutto il PLL.

In questo paragrafo ci si limiterà ad analizzare un particolare schema di VCO ricavato da un oscillatore di Colpitts e rappresentato in Fig. 5.29.



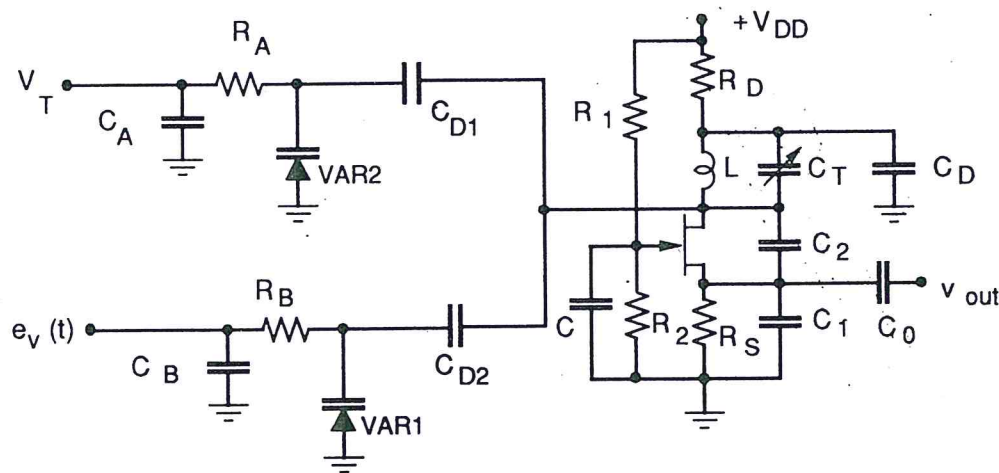


Fig. 5.29

In essa la funzione dei vari componenti è evidente. Il segnale che viene portato sui varicap deve potersi considerare piccolo. A questo provvede una oculata scelta della corrente  $I_{DS}$  di polarizzazione, quindi delle resistenze  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_S$ . Le tensioni di comando ai varicap stabiliscono la frequenza centrale di lavoro ( $V_T$ ) e l'intervallo di frequenze al suo intorno [ $e_v(t)$ , v. Eq. (5.2)]. La ragione della presenza di due canali di comando distinti sarà chiarita dalla discussione che segue.

Sia  $C(V)$  la somma della capacità  $C_T$  e di quella dei due varicap che sono ad essa in parallelo dinamicamente. Il parallelo  $L//C(V)$  presenta un'impedenza pari a:

$$Z = \frac{j \omega L}{1 - \omega^2 L C(V)} \cong j \omega L [1 + \omega^2 L C(V)]$$

per valori di  $C(V)$  tali che  $\omega^2 L C(V) \ll 1$ . Dalla (2.11) e dalla relazione precedente(\*) si ricava che la frequenza di oscillazione risulta:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + \omega_0^2 L^2 C(V) \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \cong \frac{1}{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + L C(V)} = \frac{1}{L C_{TOT}} \quad (5.41)$$

ove con  $C_{TOT}$  si è indicata la somma delle capacità della rete di Colpitts ( $C_C$ ) e di  $C(V)$ . Con una serie di passaggi di immediata interpretazione otteniamo:

(\*) Oppure calcolando la condizione di risonanza della rete di sfasamento.

$$f_0^2 = \frac{1}{4 \pi^2 L [C_C + C(V)]}$$

$$2 \lg f_0 = - \lg 4 \pi^2 L [C_C + C(V)]$$

$$\frac{\Delta f_0}{f_0} = - \frac{1}{2} \frac{4 \pi^2 L \Delta C(V)}{4 \pi^2 L [C_C + C(V)]} = - \frac{1}{2} \frac{4 \pi^2 L \Delta C(V)}{4 \pi^2 L [C_C + C(V)]} f_0^2$$

$$\Delta C(V) = - \frac{\Delta f_0}{2 \pi^2 L f_0^3}$$

Se i varicap hanno la caratteristica(\*) espressa dalla (1.52) del Vol. 1, allora:

$$\Delta C(V) = - \frac{1}{2} \frac{C_{j0}}{V_{B-i}} \left(1 + \frac{V}{V_{B-i}}\right)^{-3/2} \Delta V$$

e, con qualche passaggio:

$$k_v = \frac{\Delta f_0}{\Delta V} = \frac{\sqrt{V_{B-i}} C_{j0}}{8 \pi \sqrt{L} [\bar{C}_{TOT} (V_{B-i} + \bar{V})]^{3/2}} \quad (5.42)$$

dove si è pensata variabile solo la capacità del varicap comandata da  $e_p(t)$ .

**Esempio 5.1** Supponiamo che il VCO di Fig. 5.29 vada progettato secondo le specifiche seguenti:

- intervallo di frequenza 100÷120 MHz;
- $k_v$  minimo di 400 kHz/V per  $e_v(t) = 10$  V;
- livello dei toni modulanti intorno a  $f_0$  minore di -60 dB tra 50 Hz e 10 kHz e di -80 dB oltre i 10 kHz;
- livello del rumore di fase minore di -100 dB/Hz a 10 kHz da  $f_0$ .

---

(\*) Spesso i costruttori forniscono  $V_{B-i}$  e il valore  $C_B$  della capacità ad un fissato valore della tensione applicata. Detto questo  $V_B$ , si ha:

$$C(V) = C_B \left( \frac{V_{B-i} + V_B}{V_{B-i} + V} \right)^{1/2}$$

e la (5.42) cambia di conseguenza.

Supponendo che  $C_{TOT} = 30 \text{ pF}$ , dalla (5.41) si ricava  $L = 0.059 \text{ } \mu\text{H}$  per  $f_0 = 120 \text{ MHz}$ . Per portare l'oscillatore a  $100 \text{ MHz}$ ,  $C_{TOT}$  deve aumentare di  $13 \text{ pF}$  ( $C_{TOT} = 43 \text{ pF}$ ). Dalla (5.42) si vede che un eventuale rumore presente sulla tensione di polarizzazione del varicap produce una modulazione di frequenza (rumore di fase) tanto minore quanto più è grande  $\bar{V}$ . Dalla (5.42) si ricava anche che, a parità di altre condizioni,  $k_v$  è minimo quando  $C_{TOT}$  è massima.

Per il diodo comandato da  $V_T$ , si scelga il tipo 1N5070A della Motorola. Esso presenta una capacità di  $33 \text{ pF}$  a  $4 \text{ V}^{(*)}$  e una massima tensione di polarizzazione di  $30 \text{ V}$ . Supponendo di polarizzarlo a  $25 \text{ V}$  ed usando il valore tipico di  $V_{B-i} \cong 0.7 \text{ V}$ , si ha:

$$C(25) = 33 \sqrt{\frac{0.7 + 4}{0.7 + 25}} \cong 14 \text{ pF}$$

e, per la variazione richiesta di  $13 \text{ pF}$ , si dovrà arrivare ad una tensione:

$$V_{T_{\max}} = 6.3 \text{ V}$$

Utilizzando per il diodo di controllo il tipo 1N5464A che fornisce  $12 \text{ pF}$  a  $4 \text{ V}$  e ha una tensione massima di lavoro di  $30 \text{ V}$ , si ottiene, per  $C_{TOT} = 43 \text{ pF}$  e una tensione di lavoro  $\bar{V} = 10 \text{ V}$ :

$$k_v = 416 \text{ kHz/V}$$

Nella parte alta della banda ( $f_0 = 120 \text{ MHz}$ ),  $k_v$  sale e diventa pari a circa  $710 \text{ kHz/V}$ .

Il ramo di controllo  $[e_v(t)]$  è inserito nel PLL, mentre quello di accordo non lo è. Grazie alla (5.23) si può concludere che il ramo di controllo, per il meccanismo di reazione, vedrà ridotti gli effetti del rumore che in esso entra. Le specifiche riguardanti i toni modulanti saranno quindi verificate per il ramo di accordo, specialmente per quanto riguarda disturbi e interferenze di carattere deterministico. Cominciamo col calcolare per esso il  $k_v$  ai due estremi della banda, aspettandoci di trovare che  $k_v(100 \text{ MHz}) > k_v(120 \text{ MHz})$ . Infatti:

$$k_v(100 \text{ MHz}, \overline{C_{TOT}} = 43 \text{ pF}, \bar{V} = 6.3 \text{ V}) = 3.9 \text{ MHz/V}$$

$$k_v(120 \text{ MHz}, \overline{C_{TOT}} = 30 \text{ pF}, \bar{V} = 25 \text{ V}) = 0.55 \text{ MHz/V}$$

(\*) Si ricordi che si tratta sempre di tensioni di polarizzazione inverse.



Quindi il livello del rumore deve essere verificato a 100 MHz, ossia, utilizzando quanto detto al par. 2.7:

$$-60 \text{ dB} = 20 \lg \frac{\sqrt{\Delta f^2}}{\sqrt{2} f_m} \quad \text{per} \quad 50 \leq f_m \leq 10 \text{ kHz}$$

$$-80 \text{ dB} = 20 \lg \frac{\sqrt{\Delta f^2}}{\sqrt{2} f_m} \quad \text{per} \quad f_m > 10 \text{ kHz}$$

Si ottiene cioè ( $-60 \text{ dB} = 10^{-3}$  e  $-80 \text{ dB} = 10^{-4}$ ) con unità di misura Hz:

$$\sqrt{\Delta f^2} = (1.4 \cdot 10^{-3}) f_m \quad \text{per} \quad 50 \text{ Hz} \leq f_m \leq 10 \text{ kHz}$$

$$\sqrt{\Delta f^2} = (1.4 \cdot 10^{-4}) f_m \quad \text{per} \quad f_m > 10 \text{ kHz}$$

La tensione efficace di disturbo dovrà essere minore di:

$$V_{d,\text{eff}} = \frac{1.4 \cdot 10^{-3}}{3.9 \cdot 10^6} 50 = 18 \text{ nV} \quad \text{per} \quad f_m = 50 \text{ Hz}$$

$$V_{d,\text{eff}} = \frac{1.4 \cdot 10^{-4}}{3.9 \cdot 10^6} 10^4 = 360 \text{ nV} \quad \text{per} \quad f_m = 10 \text{ kHz}$$

Ambedue i requisiti sono molto esigenti: specialmente il primo, poiché è impensabile che si riesca a schermare gli effetti disturbanti della linea di alimentazione e del suo non perfetto filtraggio fino al limite calcolato.

Procedendo in maniera analoga, si ricava il valore della tensione di rumore massima, data la specifica sul rumore di fase. Avremo:

$$-100 \text{ dB} = 20 \lg \frac{\sqrt{\Delta f^2}}{\sqrt{2} f_m} \quad \text{per} \quad f_m = 10 \text{ kHz}$$

e quindi, con unità di misura Hz/Hz:

$$\sqrt{\Delta f^2} = (1.4 \cdot 10^{-5}) f_m \quad \text{per} \quad f_m = 10 \text{ kHz}$$

La tensione efficace di rumore per unità di banda deve essere, utilizzando la (2.18):

$$V_{n,eff} = \frac{1.4 \cdot 10^{-5}}{3.9 \cdot 10^6} 10^4 = 36 \text{ nV}$$

Dalle specifiche del diodo usato, si rileva che esso ha un  $Q = 500$  e quindi una resistenza equivalente di perdita dell'ordine di  $18.5 \text{ k}\Omega$  a  $100 \text{ MHz}$ . Questa genera una tensione efficace di rumore pari a  $18 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$  che è appena la metà di quella ammissibile; è quindi ragionevole pensare che nemmeno questa specifica possa essere rispettata.

Tutto ciò accade per la ragione più volte richiamata: volere cioè rispettare troppi legami con un minimo numero di componenti. La soluzione al problema, anche se non entreremo nei particolari, è quella di usare più diodi di accordo di diverse caratteristiche, in modo che ognuno di essi possa sempre lavorare ai più bassi valori di  $k_v$  e, possibilmente, con  $Q$  tanto alto da generare tensioni di rumore all'interno delle specifiche del rumore di fase.

Si noti infatti che, se il diodo con il quale si è lavorato fosse stato usato al minimo del suo  $k_v$  ( $0.55 \text{ MHz/V}$ ), le tre tensioni di disturbo-rumore ammissibile sarebbero divenute rispettivamente  $0.13 \text{ }\mu\text{V}$ ,  $2.6 \text{ }\mu\text{V}$  e  $0.26 \text{ }\mu\text{V}$ , valori ancora molto critici, ma già più abbordabili di quelli precedentemente ottenuti. Quindi si fissa il  $k_v$  massimo ammissibile dati i livelli di rumore-disturbo che ci si aspetta e si scelgono i diodi di conseguenza.

I vari diodi vengono collegati all'oscillatore a seguito di un comando che richiede questo o quell'intervallo di frequenza.

Nella Fig. 5.30 si riporta un altro sistema di VCO utile per una FBW più piccola di quella trattata nell'esempio precedente.

I due varicap di controllo montati in controfase impediscono che la radiofrequenza venga in qualche modo raddrizzata e riducono anche gli effetti del rumore-disturbo presente su  $e_v(t)$ . L'esame dello schema è un utile esercizio per il lettore.

Nelle Figg. 5.30.b e c è visibile una misura del rumore di fase dell'oscillatore prima e dopo la chiusura del controllo che realizza il PLL: la differenza tra le due situazioni è una conferma di quanto detto a proposito della (5.23).

Nella Fig. 5.31 è riportato il rumore di fase [definito dalla (2.18)] per due VCO inseriti in PLL.

In quello con prestazioni peggiori, a parte un livello più alto di rumore a tutte le frequenze, si notano una spuria concentrata a  $60 \text{ Hz}$  e alla sua armonica  $120 \text{ Hz}$  dovuta a disturbi provenienti dalla linea di alimentazione (la misura è stata eseguita in area anglo-americana) e un'altra spuria a  $11 \text{ kHz}$  (e  $22 \text{ kHz}$ ) dovuta ad altro disturbo.



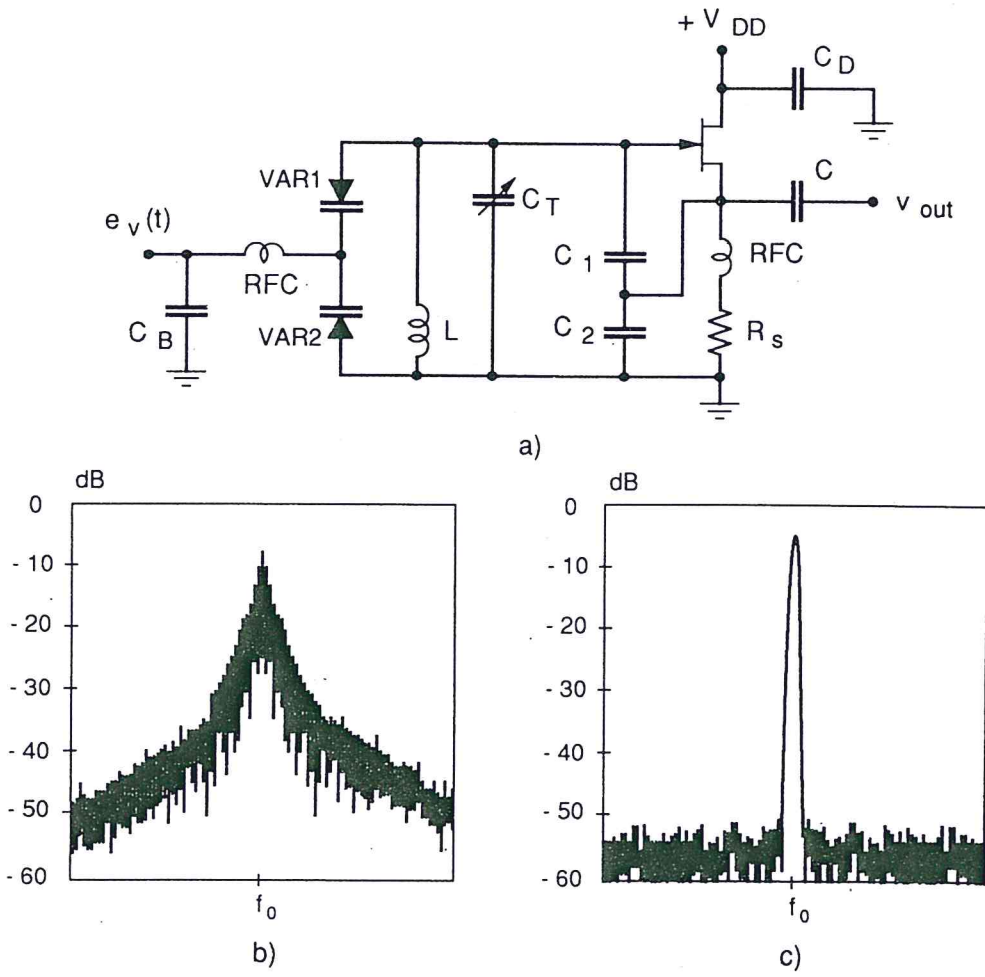


Fig. 5.30

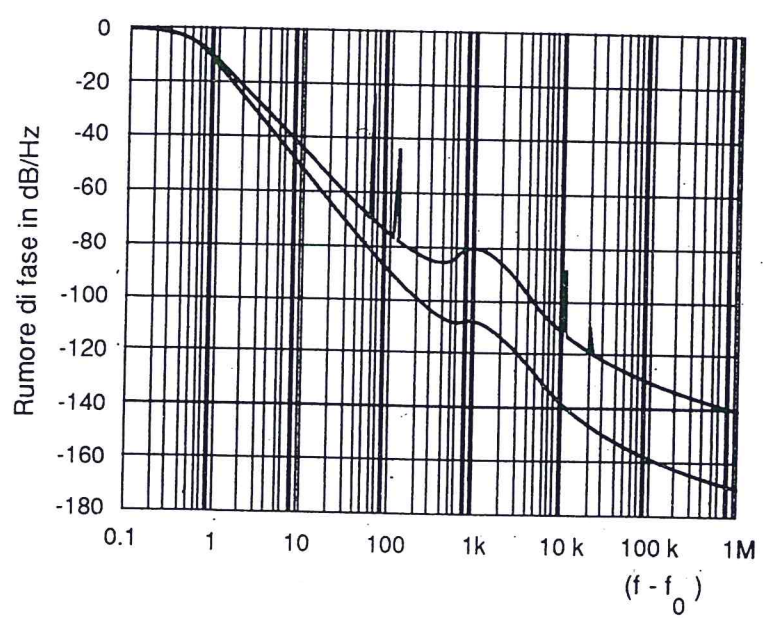


Fig. 5.31



La risonanza intorno a 1 kHz è dovuta a un cattivo progetto dell'anello che presenta  $\omega_n = 1$  kHz e un coefficiente di smorzamento  $\zeta$  evidentemente troppo basso.

Tutte queste caratteristiche negative sono scomparse o fortemente attenuate nel PLL di migliore fattura.

Dalla Fig. 5.31 si vede che, se  $\omega_n < \pi f_0/Q$ , il tratto a 20 dB/dec di Fig. 2.17, può non essere presente.

## 5.8 Lo sfasatore di 90°

Nella Fig. 5.22 compare un blocco sfasatore di 90°. Un blocco con questa funzione compare anche in apparati di modulazione SSB o FM (modulatore di Armstrong) per i quali si rimanda al Cap. 7.

Esaminiamo quindi brevemente la costituzione di un tale blocco.

Nel caso di apparati trasmettenti si lavora a frequenza fissa o, al massimo, ad un numero molto limitato di frequenze fisse. In questo caso una rete RC può servire allo scopo se utilizzata quando il livello del segnale è ancora tale da non dar luogo a eccessiva dissipazione di potenza. In Fig. 5.32.a e b sono mostrate due reti capaci di provocare rispettivamente un ritardo e un anticipo di fase di  $\pi/2$  se la frequenza di ingresso è pari a  $\omega_{\pi/2} = 1/(RC)$ .

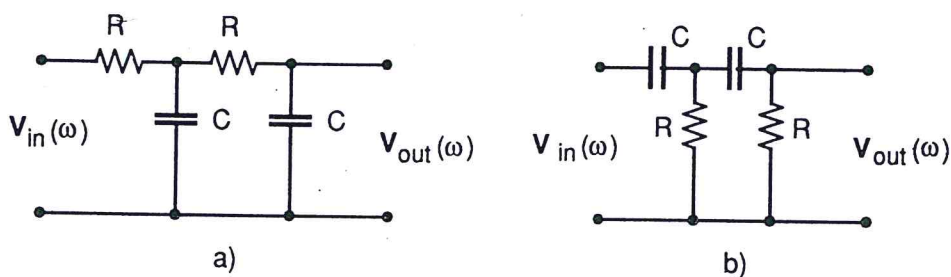


Fig. 5.32

Per applicazioni a FBW larga la soluzione dipende evidentemente dalle frequenze di lavoro.

Differenziatori o integratori del tipo di quelli discussi ai parr. 5.7.a e 5.7.b del Vol. 1 possono servire allo scopo, così come uno stadio a emitter o a base comune con carico capacitivo. In questi casi la funzione di trasferimento dipende dalla frequenza e quindi lo stadio sfasatore dovrà essere seguito da un amplificatore

che preveda un AGC per mantenere un livello costante del segnale in uscita. Tutte queste ultime soluzioni possono essere utilizzate per realizzare il blocco sfasatore che compare in Fig. 5.22.

Infine, in apparati di ricezione, lo stesso PLL di sintonia, se usa come PD un moltiplicatore o una cella EXOR, fornisce due segnali sfasati dei richiesti  $90^\circ$ . Per finire, si consideri lo schema di Fig. 5.33.a che realizza una ASM (v. par. 3.3, Vol. 3) il cui grafo di flusso è mostrato in Fig. 5.33.b.

Le funzioni di commutazione che regolano la macchina sono:

$$\text{Next } A = \bar{B}$$

$$\text{Next } B = A$$

e la memoria è stata realizzata con DFF (v. par. 3.2, Vol. 3) che commutano sul fronte positivo. E' immediato ricavare che le uscite  $Q_A$  e  $Q_B$  (Fig. 5.33.c) sono sfasate di  $90^\circ$  e così sono le armoniche in esse contenute. Un amplificatore accordato con  $Q$  alto sull'armonica desiderata varrà a raggiungere lo scopo.

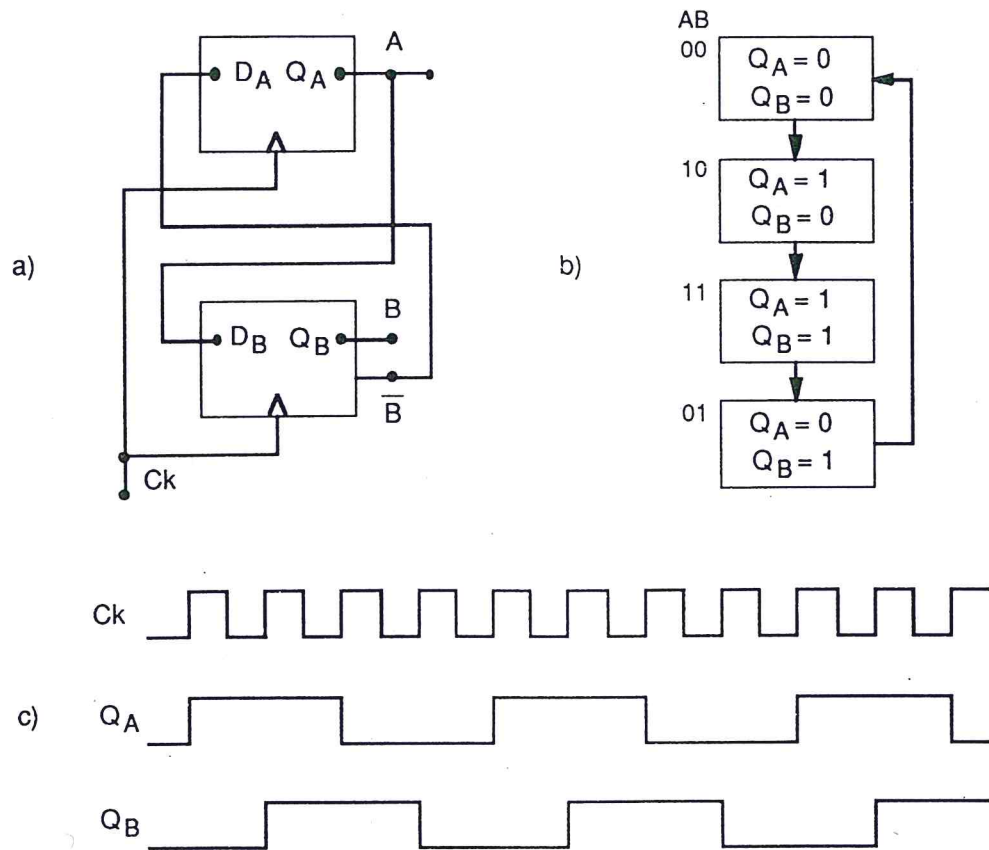


Fig. 5.33



## 5.9 Il progetto di un PLL

Il parametro di più immediata valutazione di un PLL è l'intervallo di frequenza all'interno del quale esso deve essere utilizzato. Se l'intervallo è tale da non poter essere coperto da un solo  $\Delta\omega_L$ , esso sarà diviso in bande secondo le tecniche esposte nel par. 5.7. Quanto si dirà vale quindi per ognuna di queste bande.

Si sceglierà un'architettura, generalmente basata su un componente integrato, capace di operare nel richiesto intervallo (complessivo) di frequenze di lavoro. Le operazioni di progetto sono quindi schematicamente riportate di seguito, facendo riferimento alle relazioni prima ricavate.

- 1) La frequenza  $\omega_0$  del VCO coinciderà con la frequenza centrale dell'intervallo di lavoro.
- 2) Il valore di  $\zeta$  sarà fissato a 0.7 per quanto detto a proposito della (5.22).
- 3) A questo punto si deve valutare il rapporto S/N all'ingresso del PLL, nonché la banda B del canale d'ingresso. E' stato sperimentalmente determinato che se S/N è almeno 6 dB, ossia  $S/N = 4$ , il PLL non avrà difficoltà ad agganciarsi a  $\omega_i$ . Possono quindi darsi due casi:
  - a)  $(S/N)_i \leq 4$ : dalla (5.23) si deve scegliere  $B_n$  in modo che  $(S/N) \cdot (B/B_n) > 4$ . Quindi si determina  $\omega_n$  dalla (5.22) e conseguentemente  $\Delta\omega_L$  dalla (5.26) ed equivalenti per gli altri PD.  
La relativa libertà nella scelta di  $B_n$ , che deve soddisfare una relazione monolatera, permetterà di aggiustare il valore  $\Delta\omega_L$  secondo le esigenze;
  - b)  $(S/N)_i \geq 4$ : si fissa direttamente  $\Delta\omega_L$ , quindi si determina  $\omega_n$  e  $B_n$ .
- 4) Fissate le tensioni di alimentazione all'interno delle specifiche dell'integrato scelto e secondo opportunità (tensioni già disponibili nell'apparato o facilmente generabili, etc.), si possono determinare, con le relazioni date in precedenza, i parametri  $k_p$  e  $k_v$  e le caratteristiche del VCO, comprese quelle relative al suo rumore di fase.
- 5) Si sceglie l'LPF: nel caso di filtro passivo, per avere un utile comportamento del complesso polo-zero, dovrà essere  $\tau_1 > \tau_2$ , mentre ciò non è necessario per il filtro attivo.  
Relazioni tipo le (5.25), (5.25') e (5.25'') possono essere utili: si noti che tra  $R_1$ ,  $R_2$  e C, un valore può essere scelto arbitrariamente. La scelta sarà operata in modo da non dar luogo a risultati difficilmente gestibili.
- 6) Si determinano gli altri parametri del PLL.