Misure
ed
incertezze di misura

Misurazione e Misura

- Misurare significa quantificare una grandezza fisica chiamata misurando tramite un processo (misurazione) il cui risultato è detto misura.

- La misura deve poter essere ripetuta anche da altri e quindi va comunicata in modo inequivocabile. Pertanto, con la misura bisogna fornire almeno il valore, l'incertezza e l'unità di misura:

Valore, Incertezza e Unità

- **Il valore** che quantifica il misurando – è il risultato del confronto tra il misurando e una grandezza di riferimento (CAMPIONE).
- **L'incertezza della misura** – è il grado di dispersione dei valori attribuiti al misurando in occasione di diverse misurazioni ed è, quindi, indicativa del pregio (e anche del costo) della strumentazione di misura e anche della metodologia adottata.
- **L'unità di misura** – che deve essere internazionalmente riconosciuta ai fini di una migliore comunicazione del risultato.

Esempi di Misura

- Tensione a vuoto di una batteria (9,6 ± 0,2) V
- Resistenza di un resistore (12,5 ± 0,1) Ω
- Si comunica il valore, l'incertezza, e l'unità di misura.

Errori e incertezze (effetti casuali)

- Nel processo di misura intervengono **molti fattori (grandezze) di influenza**: la temperatura, l'umidità, vibrazioni o disturbi di tipo elettrico e elettromagnetico dell'**ambiente** in cui si svolge la misura, etc.

- Tutti questi fattori (grandezze di influenza) interagiscono in vari modi nel processo di misura, per cui se questo è ripetuto si ottengono risultati diversi determinando una **dispersione dei valori misurati**.

- Questi fattori citati intervengono in modo casuale nel processo di misura pertanto se si ripete N volte la misura (con $N \rightarrow \infty$) e si opera una media il loro effetto tende ad annullarsi (**effetti casuali**).

Errori e incertezze (effetti sistematici)

- La misura è anche influenzata dai comportamenti non ideali dei vari elementi del sistema di misura (difetti nei modelli e nei campioni) che danno luogo a scarti sempre nella stessa direzione (**effetti sistematici**) (non si possono rimuovere con un processo di media).

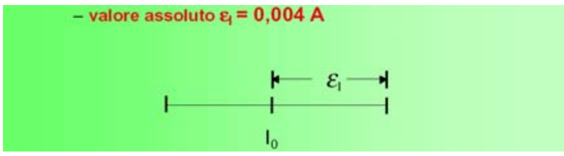
- Con riferimento a questi ultimi, in alcuni casi si è in grado di stimare l'entità e il segno dello scarto e pertanto si è in grado di correggere la misura (taratura) – in questo caso si parla di "errori" (errori sistematici). Tuttavia, anche quando è possibile effettuare una taratura permangono sempre degli errori residui dovuti alle non idealità degli standard di taratura usati.

- Infine, in altri casi, gli scarti non si possono quantificare e quindi correggere (es. parametri meccanici o magnetici in un amperometro analogico).

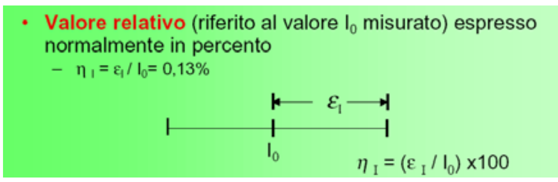
Espressione della misura

- In conclusione, la misura sarà sempre affetta da una certa **<u>“incertezza” che quindi caratterizza la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando.</u>**
- Per effetto dell’incertezza **il risultato di una misura non è espresso da un valore, ma da un intervallo** per cui la misura di una grandezza “m” sarà espressa come:
- $$M \pm \varepsilon$$
- dove M, valore centrale dell’intervallo, è la stima “migliore” del misurando ed ε è la semiampiezza della fascia di incertezza.

Valore assoluto e relativo



$I = I_o \pm \varepsilon_I$



$I = I_o \pm \eta_I\%$

Legame dB -> %

$$\boxed{a_x(\text{dB}) = 20\log_{10}\left(1 + \frac{a_x(\%)}{100}\right)}$$

$$\frac{a_x(\text{dB})}{20} = \log_{10}\left(1 + \frac{a_x(\%)}{100}\right)$$

$$10^{\frac{a_x(\text{dB})}{20}} = 1 + \frac{a_x(\%)}{100}$$

$$\boxed{a_x(\%) = 100\left(10^{\frac{a_x(\text{dB})}{20}} - 1\right)}$$

Scrittura del risultato di una misura

- Per scrivere correttamente il risultato di una misura bisogna fare alcune considerazioni:
- Cifre decimali di un numero sono le cifre dopo la virgola (es 7,543624 -> cifre decimali = 543624)
- Cifre significative di un numero sono le cifre dopo gli zeri (es 0,00254 cifre significative = 254)

Misura con incertezza assoluta

- Quando si effettua una misura si riporta inizialmente il valore letto sullo strumento con tutte le sue cifre decimali (es 7,543624).
- In seguito si valuta l'incertezza con tutte le sue cifre decimali (es 0,00254).
- Si scrive l'incertezza considerando al massimo due cifre significative arrotondando al valore superiore (es 0,0026).
- Si scrive il valore con le stesse cifre decimali dell'incertezza arrotondando al più vicino (es 7,5436)
- Si scrive la misura:
    - **m = 7,5436 ± 0,0026**

Valutazioni di tipo A

- Se si suppone che la misura sia affetta solo da incertezze di tipo casuale, l'incertezza può essere valutata con metodi statistici. Questi **metodi di valutazione dell'incertezza si dicono di tipo A**. Se si ripete la misura nelle stesse condizioni per molte volte e si traccia l'istogramma si vede che questo tende ad una gaussiana (Teorema del limite centrale)

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - x_m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- con x_m valore medio e σ^2 varianza.
- la probabilità che un valore preso a caso tra le misurazioni effettuate cada nell'intervallo $x_m \pm \sigma$ è del 68.4%.

Stime

- La teoria statistica dimostra che, per qualunque p(x), la stima migliore del valor medio (x_m) è data dalla media sperimentale (o campionaria) m_N ottenuta su N osservazioni indipendenti x_k come:

$$m_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

- La stima migliore della varianza è data dalla varianza del valor medio delle misure definita come:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}(m_k - m_N)^2$$

- Volendo quindi quantificare l'incertezza si assume σ_M come stima sperimentale dell'incertezza.

- σ_M è detta scarto o **incertezza standard** di tipo A sperimentale ed è indicata con la lettera u.

- Come noto si ha che la probabilità che un valore preso a caso cada nell'intervallo è del 68.4%. Se non si ritiene sufficiente la probabilità del 68.4% si può aumentare questo valore introducendo **l'incertezza estesa** $K \times u$ dove K è detto fattore di copertura.

- Con K = 2 si ha una probabilità del 95.4% (2u). Con K = 3 si ha una probabilità del 99.7% (3u). Quindi si può esprimere la misura come:

$$x = m_N \pm Ku$$

Valutazioni di tipo B

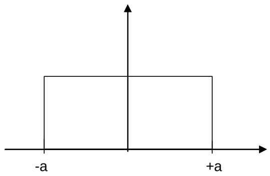
- In questa classe, rientrano tutte le valutazioni di incertezze che non vengono ricavate tramite la deviazione standard di misure ripetute (come per quella di tipo A).

Procedura per valutazioni di tipo B

- Nelle valutazioni di tipo B in primo luogo si fa una stima dei limiti delle variazioni sulla misura causate da una sorgente d'incertezza, ovvero si valuta lo scarto massimo.
- In seguito si assume una certa distribuzione di probabilità tra questi limiti.
- Infine, si calcola una deviazione standard equivalente che rappresenta l'incertezza standard di tipo B.

Distribuzione rettangolare

- La distribuzione rettangolare si utilizza quando si conoscono i limiti di variazione e si può assumere che tutti i valori siano equiprobabili ovvero quando non si hanno informazioni sulla distribuzione tra questi limiti.

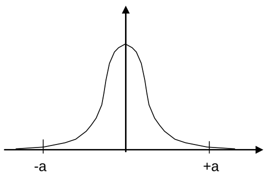


- In questo caso la relazione tra incertezza standard u e i limiti di variazione (scarto massimo ± a) è :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(x - x_m)^2 dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} x^2 dx = \frac{1}{2a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^2}{3}$$

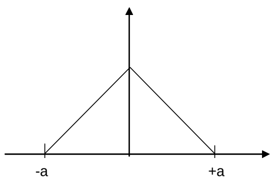
$$u = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0.6a$$

Altre distribuzioni



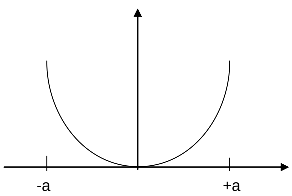
distribuzione normale

$$u = \frac{a}{2} = 0.5a$$



distribuzione triangolare

$$u = \frac{a}{\sqrt{6}} \cong 0.4a$$



distribuzione ad U

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \cong 0.7a$$

Incertezza per misure dirette

- Le misure dirette si distinguono tra misure singole e misure ripetute.
- La prima strategia di solito si adotta quando si utilizzano metodi e strumenti non troppo "sensibili", cosicché ci si aspetta di ottenere sempre lo stesso risultato
- La seconda strategia si adotta con strumenti e metodi tanto "sensibili" da mettere in evidenza le variazioni indotte sulla misura dalle numerose grandezze di influenza.

misure singole

- **Nelle misure singole** l'incertezza si ottiene, dopo aver corretto eventuali errori sistematici, combinando le incertezze di tipo B dovute alla strumentazione e ad altre cause.
- Per la valutazione dell'incertezza occorre specificare se si è calcolato l'errore massimo o l'incertezza standard.
- Per cui nel primo caso si avrà:

$$\delta y = \sum_{i=1}^{N} \delta y_i$$

- Mentre nel secondo caso si ha:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2}$$

misure ripetute

- **Nelle misure ripetute** la stima migliore è data dalla media delle varie misure e l'incertezza totale va calcolata combinando le incertezze casuali e quelle sistematiche. Anche in questo caso si deve specificare se si è calcolato l'errore massimo:

$$\delta y_{tot} = \delta y_A + \delta y_B$$

- o l'incertezza standard

$$u_{tot} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Valutazione di caso peggiore (approccio deterministico) per l'errore di misure indirette (propagazione dell'errore)

- In alcuni casi, il misurando y non è stimabile tramite una misura diretta ma è una funzione di altre N quantità x_i correlate ad esso attraverso una relazione funzionale:
- Nel caso di tre grandezze di ingresso possiamo scrivere:

$$y = f(a, b, c)$$

- Per le grandezze di ingresso il valore sarà noto all'interno di una fascia di incertezza; quindi si avrà:

$$a_m = a_0 \pm \delta a \qquad b_m = b_0 \pm \delta b \qquad c_m = c_0 \pm \delta c$$

$$y_0 = f(a_0, b_0, c_0)$$ valore della misura

sviluppo in serie di Taylor

$$y_0 + \delta y = f\left(a_0 + \delta a, b_0 + \delta b, c_0 + \delta c\right) =$$

$$f\left(a_0, b_0, c_0\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta a + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta b + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta c$$

$$\delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta a + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta b + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right)\delta c$$

Scarto massimo

- **Nel caso di valutazione pessimistica (deterministica)** si prendono tutte le derivate in modulo, e **l'errore massimo** coincide con lo scarto massimo su y, per cui si ha:

$$\delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right|\delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right|\delta b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\Big|_{a_0, b_0, c_0}\right|\delta c$$

- Formula di propagazione dell'errore

Valutazione probabilistica della incertezza per misure indirette (propagazione dell'incertezza)

Se è richiesta una **valutazione di tipo probabilistico , in assenza di correlazione tra le grandezze,** la varianza è calcolabile come:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 \sigma_c^2$$

E' il modello che deve essere utilizzato nella stima delle incertezze nella emissione di certificati ufficiali; è anche il modello suggerito dalla Guida all'espressione dell'incertezza di misura (CEI UNI).
Passando dalle varianze alle incertezze si ha:

$$u_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 u_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 u_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}|_{a_0,b_0,c_0}\right)^2 u_c^2$$

- Poiché sono coinvolte più grandezze, la distribuzione tende a quella gaussiana e la σ_y assume il significato di incertezza tipo u_y con una fiducia del 68.4%.

- Se si vogliono avere probabilità più elevate bisogna moltiplicare u_y per un fattore di copertura.